Teil II Zählstatistik

1. Aufgabenstellung

1.1 Vergleichen Sie experimentelle Zählverteilungen mit statistischen Modellen (POISSON-Verteilung und Normalverteilung)

2. Theoretische Grundlagen

Stichworte zur Vorbereitung:
Impulszahl, Zählrate, Binominalverteilung, POISSON -Verteilung, Normalverteilung, Erwartungswert, Mittelwert, Standardabweichung, absoluter Fehler, relativer Fehler

Literatur:

W. Walcher	Praktikum der Physik, Kap. 6.4, 4.2 Teubner-Verlag 1989
V. Schuricht, J. Steuer	Praktikum der Strahlenschutzphysik Kap. 1.2.1, Verlag der Wissenschaften, 1983
W. Stolz	Radioaktivität, Kap. 2.5, Teubner-Verlag 1990
W. H. Gränicher	Messung beendet – was nun? Teubner-Verlag1994
Alan M. Portis	Berkeley, Physik Kurs 6 Physik und Experiment Verlag Vieweg & Sohn, Braunschweig
J. Becker, H.J. Jodl	Physikalisches Praktikum für Naturwissenschaftler und Ingenieure VDI-Verlag 1991

2.1 Statistische Modelle

Die Umwandlung radioaktiver Atomkerne ist als Zufallsphänomen statistischen Gesetzen unterworfen. Man kann nicht mit Sicherheit sagen, wann sich ein Atomkern umwandelt. Bekannt ist nur die Wahrscheinlichkeit, mit der das Umwandlungsergebnis innerhalb eines vorgegebenen Zeitintervalls eintritt. Bei der Beobachtung radioaktiver Umwandlungsprozesse sind daher statistische Schwankungen zu erwarten. Die Wahrscheinlichkeit, dass in einem Zeitintervall Δt, das klein gegen die Halbwertzeit $T_{1/2}$ ist, n Kernumwandlungen (Zählimpulse) auftreten, wird mit einer bestimmten Verteilungsfunktion beschrieben, aus der sich die mittlere Zahl der Kernumwandlungen $\bar{n}$ und deren Schwankungen Δn berechnen lassen.

2.1.1 Binominalverteilung

Bezeichnet **p die Wahrscheinlichkeit** dafür, dass bei einem **Einzelversuch** ein bestimmtes Ereignis eintritt, so ist $1-p$ die Wahrscheinlichkeit für das Nichteintreten. Die **Wahrscheinlichkeit $P(n)$**, dass bei **N voneinander unabhängigen Versuchen** das Ereignis n-mal eintritt, ist dann durch die Binominalverteilung

$$P(n) = \frac{N!}{(N-n)!\, n!}\, p^n \, (1-p)^{N-n} \qquad (1)$$

gegeben. Sie ist für ganzzahlige Werte $n=0,1,2,...,N$ definiert.

Für eine sehr große Zahl von Ereignissen N lassen sich aus der Binominalverteilung zwei Grenzfälle, die POISSON- und die GAUSS-Verteilung ableiten.

2.1.2 POISSON –Verteilung

Im 1. Grenzfall soll $p"N<1$ gelten, da N sehr groß ist, muss p relativ klein sein (z.B. Nulleffekt, d.h. die Ereignisse müssen relativ selten sind).

Die POISSON-Verteilung (Gl. 2) ist somit die Grenzverteilung der Binominalverteilung (Gl. 1) für $N \to \infty$ und $p \to 0$. Sie beschreibt die Verteilung seltener Ereignisse, die mit einer geringen Wahrscheinlichkeit auftreten.

$$P(n) = \frac{\mu^n}{n!}\, e^{-\mu} \quad . \qquad (2)$$

Sie gibt in unserem speziellen Fall die Wahrscheinlichkeit an, mit der in einer bestimmten Zeit Δt n Zählereignisse registriert werden. Die Größe μ (Erwar tungswert für $N \to \infty$) entspricht dabei der mittleren Zahl $\overline{n}$ (Mittelwert) der Kernumwandlungen (Zählereignisse) in der Zeit Δt. Während μ eine ganze oder gebrochene Zahl sein kann, darf n grundsätzlich nur ganzzahlige Werte annehmen.

Aus Abb. 1 ist ersichtlich, dass die POISSON –Verteilung insbesondere für kleine μ unsymmetrisch ist. Mit wachsendem μ nähern sich die Maxima dem Mittelwert und die Verteilungen werden mehr und mehr symmetrisch.

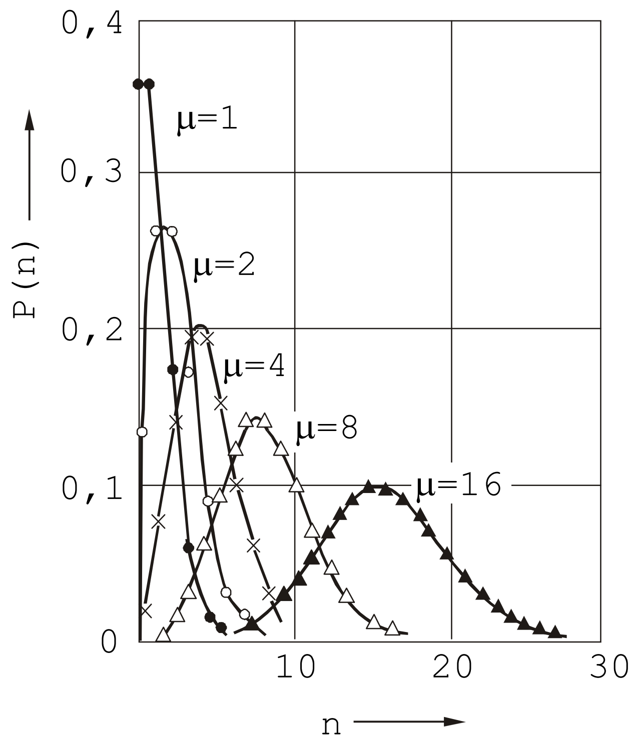

Abb. 1: POISSON -Verteilung für verschiedene Erwartungswerte μ

Die statistische Schwankung oder Standardabweichung σ einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ist definiert als

$$\sigma = \sqrt{\sum_n P(n) \cdot (n - \mu)^2} \quad . \tag{3}$$

Für den speziellen Fall der POISSON-Verteilung ergibt sich

$$\sigma^2 = \mu \quad \text{bzw.} \quad \sigma = \sqrt{\mu} \; . \tag{4}$$

Die POISSON -Verteilung ist zur Interpretation der Beobachtungsergebnisse radioaktiver Umwandlungsereignisse geeignet.

2.1.3 GAUSS-Verteilung (Normalverteilung)

Der 2. Grenzfall der Binominalverteilung berücksichtigt das Auftreten relativ großer Wahrscheinlichkeiten (z.B. p=0,5). Damit wird NÄpo1. Unter dieser Bedingung geht die Binominalverteilung in die GAUSS-Verteilung (Normalverteilung) (Gl. 5) über.

$$P\left(n-\mu\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\cdot e^{-\frac{\left(n-\mu\right)^{2}}{2\,\sigma^{2}}}\ . \qquad (5)$$

Bei der Normalverteilung (Gl. 5) treten im Gegensatz zur POISSON-Verteilung (Gl. 2) zwei unabhängige Parameter auf (μ und σ). Beim Übergang von der POISSON- zur Normalverteilung muss die Standardabweichung $\sigma=\sqrt{\mu}\approx\sqrt{n}$ erhalten bleiben. Damit wird aus der zweiparametrigen Verteilung (Gl. 5) die einparametrige Verteilung

$$P\left(n\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\,\mu}}\cdot e^{-\frac{\left(n-\mu\right)^{2}}{2\,\mu}}\ .$$

Sie gibt die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer Abweichung vom wahren Wert μ an und gilt nur für große Werte μ und Werte von n in der Nähe von μ. Im Gegensatz zur POISSON-Verteilung ist sie, als Kurve (Abb. 2) dargestellt, symmetrisch zum Mittelwert μ, d.h., es treten gleich große positive und negative Abweichungen vom Mittelwert mit gleicher Wahrscheinlichkeit auf. Die Wendepunkte der Kurve liegen im Abstand $\pm\,\sigma$ von μ.

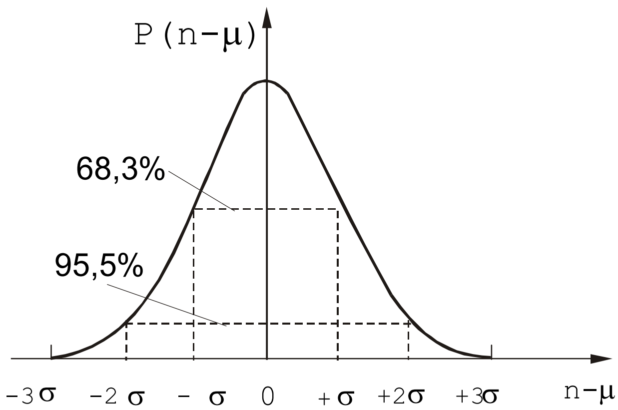

Abb. 2: GAUSS-Verteilung $P=P\left(n-\mu\right)$

Je nach Größe von σ ist die GAUSS-Kurve steiler oder flacher. Bei einem Mittelwert $\mu \geq 50$ lässt sich die POISSON-Verteilung stets mit hinreichender Genauigkeit durch die GAUSS-Verteilung ersetzen (Abb. 3).

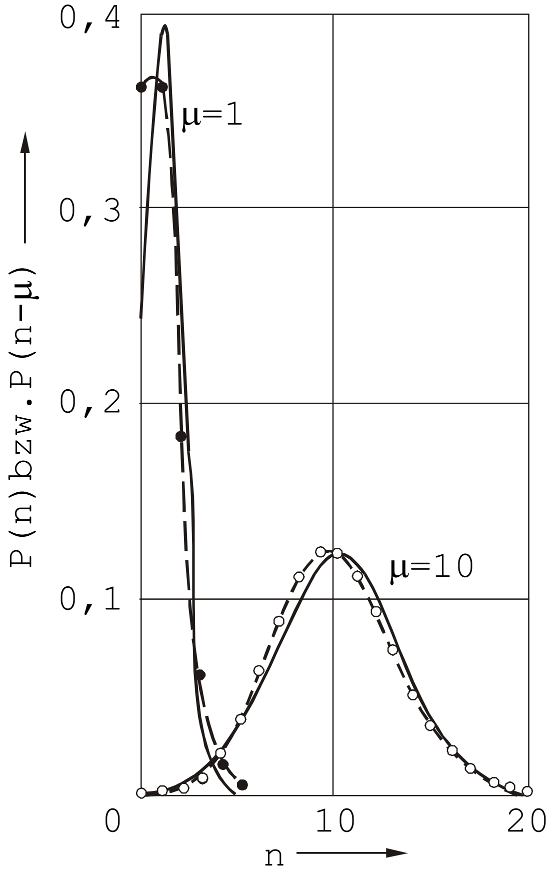

Abb. 3: Vergleich der POISSON-Vereilung mit der GAUSS-Verteilung für die Erwartungswerte und $\mu=1$ und $\mu=10$

------- POISSON-Verteilung

——— GAUSS-Verteilung

Der Abb. 2 ist zu entnehmen, dass bei der GAUSS-Verteilung mit einer bestimmten Wahrscheinlichkeit auch Werte auftreten, die eine größere Abweichung von μ zeigen, als es die Standardabweichung angibt.

Die Wahrscheinlichkeit, dass bei einer einzelnen Beobachtung der Messwert (die Impulszahl) n innerhalb des Bereiches $(\mu \pm \sigma)$ liegt, beträgt 0,683 oder, in Prozent ausgedrückt, 68,3%.

Mit einer Wahrscheinlichkeit von 31,7% liegt der Wert außerhalb dieses Intervalls. Entsprechende Berechnungen zeigen, dass das Ergebnis einer Einzelmessung mit einer Wahrscheinlichkeit von 95,5% in den Bereich $(\mu \pm 2\sigma)$ und mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,7% im den Bereich $(\mu \pm 3\sigma)$ fällt.

Damit gleichbedeutend ist die Angabe des prozentualen Anteils aller Messwerte, die innerhalb gewisser Grenzen liegen:

$$
\begin{array}{ll}
(\mu \pm 0{,}6745\sigma) & 50\% \\
(\mu \pm \sigma) & 68{,}3\%\ (1\sigma\text{-Regel}), \\
(\mu \pm 2\sigma) & 95{,}5\%\ (2\sigma\text{-Regel}), \\
(\mu \pm 3\sigma) & 99{,}7\%\ (3\sigma\text{-Regel}).
\end{array}
\tag{6}
$$

Die Größen μ und σ gelten nur für die reine statistische Verteilung einer unendlich großen Zahl von Messwerten. Für die praktische Auswertung von Messergebnissen werden deshalb Näherungen verwendet. Die beste Annäherung an μ ist der arithmetische Mittelwert $\bar{n}$ aus i-Messungen $n_1, n_2, \ldots n_i$:

$$\bar{n} = \frac{1}{i} \sum_{k=1}^{i} n_k \ . \tag{7}$$

Ein brauchbarer Näherungswert für σ ist die experimentelle Standardabweichung (mittlerer Fehler der Einzelmessung) oder mittlere quadratische Abweichung

$$s = \sqrt{\frac{1}{i-1} \sum_{k=1}^{i} \left(n_i - \bar{n}\right)^2} \tag{8}$$

die bei der Beurteilung radioaktiver Zählereignisse in

$$\sigma = \sqrt{\mu} \approx \sqrt{\bar{n}} = s \tag{9}$$

übergeht.

Für $i = \infty$ geht $\bar{n} \to \mu$.

3. Versuchsdurchführung

Mittels eines Detektors werden Zählimpulse eines α-Strahlers über das universelle Messwerterfassungssystem „Cassy“ registriert. Durch Abstandsvariation zwischen Detektors und Präparat werden verschiedene mittlere Zählraten $\bar{\dot{n}}$ eingestellt und die statistische Verteilung der Zählimpulse aufgenommen.

3.1 Zeigen Sie qualitativ den Übergang von der POISSON-Verteilung zur Normalverteilung. Nehmen Sie 4 Messdiagramme auf:

1. $\bar{\dot{n}} \approx 50\ s^{-1}$
2. $\bar{\dot{n}} \approx 10\ s^{-1}$
3. $\bar{\dot{n}} \approx 3\ s^{-1}$
4. Nulleffekt

3.2 Berechnen Sie für 2. bis 4. die theoretischen Werte über die POISSON - und die Normalverteilung. Tragen Sie die POISSON - die Normal - und die experimentellen Werte in ein Diagramm ein. Welche Schlussfolgerung können Sie ableiten?

3.3 Berechnen Sie für $\mu = 50$ die POISSON- und Normalwerte für die Impulszahlen $30 + x \cdot 5$ $(x=0,1...7,8)$. Tragen Sie die Werte in ein Diagramm ein. Diskutieren Sie die erhaltene Grafik!

3.4 Überprüfen Sie unter Verwendung von Wahrscheinlichkeitspapier ob für 3.1.1 eine Normalverteilung (statistische Reinheit) vorliegt. Der einfachste Nachweis, dass registrierte Impulse einer Normalverteilung genügen, kann grafisch mit Hilfe von Wahrscheinlichkeitspapier erbracht werden.
Auf der linear geteilten Abszisse werden die Zählimpulse und auf die Ordinate die Summenhäufigkeit in % aufgetragen.
Für eine (theoretische) Normalverteilung ergibt sich eine Gerade die durch die in Tabelle 1 angegebenen Punkte verläuft.

Punkt	1	2	3	4	5
Zählim-pulse	μ	$\mu - \sqrt{\mu}$	$\mu + \sqrt{\mu}$	$\mu - 2\sqrt{\mu}$	$\mu + 2\sqrt{\mu}$
$\sum$ / %	50	15,9	84,1	2,3	97,7

Tabelle 1: Theoretische Summenhäufigkeit für markante Punkte der Normal-Verteilung

Zwischen den durch die Punkte 2 und 3 (Wendepunkte der „Glockenkurve“) gegebenen Grenzen liegen im Mittel 68% der Messpunkte, d.h. die Wahrscheinlichkeit (was oft in der Literatur auch als statistische Sicherheit, Vertrauensniveau bezeichnet wird), dass eine Einzelmessung innerhalb dieser Grenzen liegt, beträgt 68%. Analog beträt die statistische Sicherheit zwischen den Punkten 4 und 5 ca. 95%.

Da $\bar{n}$ aus einer endlichen Anzahl n von Messungen ermittelt wird, ist die Standardabweichung $\sqrt{\bar{n}}$ selbst mit einem mittleren relativen Fehler von

$$\frac{\Delta\sqrt{\bar{n}}}{\sqrt{\bar{n}}} = \pm\frac{100}{\sqrt{2n-1}}\ \% \tag{10}$$

behaftet. Bei 100 Messungen (d. h. $n = 100$) ergibt sich also

$$\Delta\sqrt{\bar{n}}\ /\ \sqrt{\bar{n}} = 7{,}1\%. \tag{11}$$

Werden zur Konstruktion der Geraden die beiden Punkte $\left(\bar{n} - 2\sqrt{\bar{n}};\ 2{,}3\%\right)$ und $\left(\bar{n} + 2\sqrt{\bar{n}};\ 97{,}7\%\right)$ verwendet, so ist zu beachten, dass deren Abszissen deshalb nur auf

$$\vartheta = \pm\frac{2\sqrt{\bar{n}}}{\sqrt{2n-1}} \tag{12}$$

d.h. 7,1% von $2\sqrt{\bar{n}}$ genau festgelegt sind. Eine experimentell aus n Messungen ermittelte Verteilung

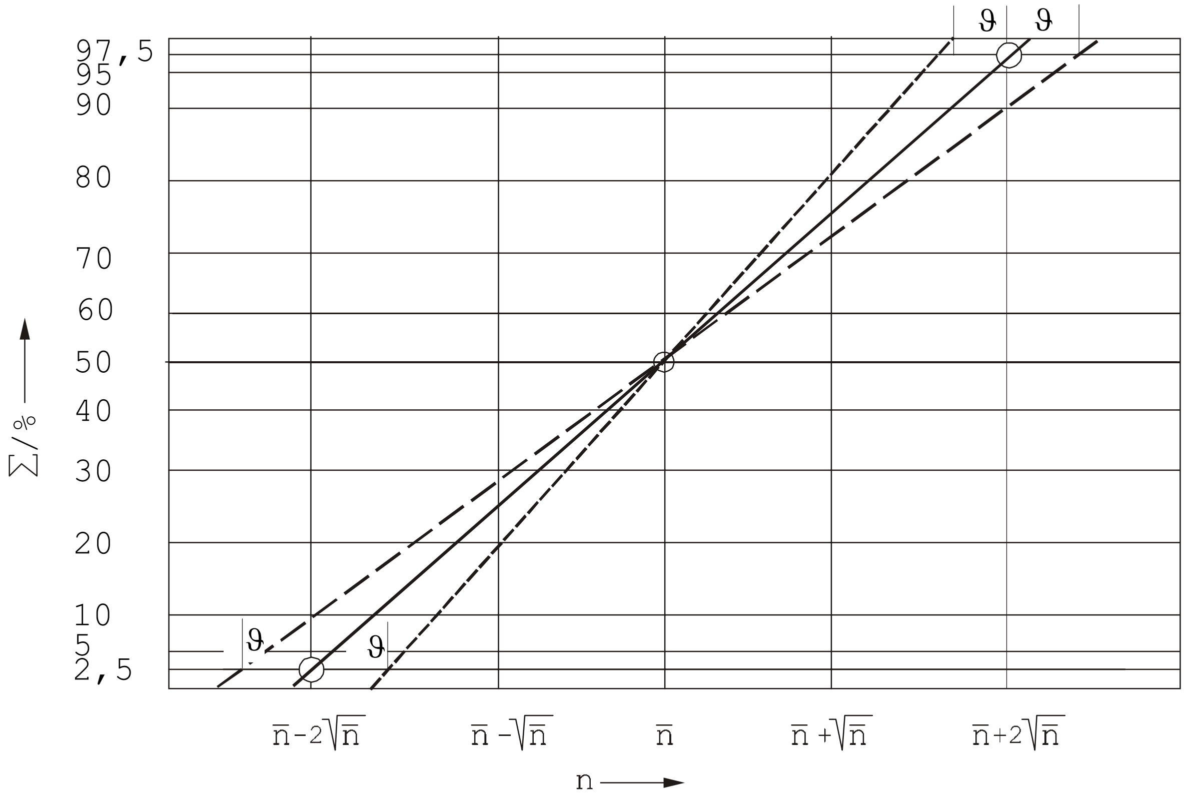

Abb. 4 : Zur Bestimmung der statistischen Verteilung von Impulszahlen

gehorcht also auch dann noch einer GAUSS-Verteilung, wenn die Summenhäufigkeitsgerade in dem Bereich liegt, der durch die in Abb. 4 gestrichelt gezeichneten Geraden begrenzt wird. In diesem Fall bezeichnet man die Zählung als „statistisch rein“ d.h. es liegen keine weiteren zufälligen oder systematischen Fehler vor.

4.5 Fehlerbetrachtungen

Führt man nur eine einzige Messung mit dem Ergebnis n_1 aus, so wählt man $\sqrt{n_1}$ als absoluten Fehler bei der Bestimmung von $\bar{n}$. Das Ergebnis für den durch eine einzige Messung bestimmten Mittelwert ist dann

$$\bar{n} = n_1 \pm \sqrt{n_1}\,. \tag{13}$$

Der relative Fehler nimmt mit wachsender Anzahl der gemessenen Ereignisse (Zählimpulse) ab

$$\frac{\Delta \bar{n}}{\bar{n}} = \frac{\Delta n_1}{n_1} = \frac{\sqrt{n_1}}{n_1} = \frac{1}{\sqrt{n_1}} \quad . \tag{14}$$

Werden k Einzelmessungen mit den Ergebnissen $n_1 (i=1, \; ..., \; k)$ durchgeführt, kann der Mittelwert als Ergebnis angegeben werden:

$$\bar{n} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} n_i \quad . \tag{15}$$

Der relative Fehler dieses Mittelwertes wird von der Gesamtzahl der registrierten Zählereignisse bestimmt.

$$\frac{\Delta \bar{n}}{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^{k} n_i}} \quad . \tag{16}$$

Soll beispielweise ein relativer Fehler von 1% erreicht werden, so müssen insgesamt 10000 Ereignisse gezählt werden. Dabei spielt es keine Rolle, ob dies in mehreren Einzelexperimenten oder in einem einzigen Experiment geschieht.

Werden z.B. in 100 Einzelmessungen zu je 10 s insgesamt 10061 Ereignisse gezählt, beträgt der Mittelwert der Einzelmessungen $\bar{n} = 100{,}61$. Der relative Fehler dieses Mittelwertes beträgt

$$\frac{\Delta \bar{n}}{\bar{n}} = \frac{1}{\sqrt{n_{ik}}} = \frac{1}{\sqrt{10061}} \approx 1\% \quad . \tag{17}$$

Der absolute Fehler des Mittelwertes beträgt $\Delta \bar{n} = 1\% \cdot \bar{n} = 1{,}0$. Das Messergebnis für die Impulszahl lautet also $n = \bar{n} \pm \Delta \bar{n} = 100{,}6 \pm 1{,}0$.

Beachten Sie, dass es nicht im Widerspruch zu dieser relativ hohen Genauigkeit steht, wenn man eine Einzelmessung mit z.B. nur 85 Zählereignissen erhält. Die Standardabweichung der Einzelmessungen beträgt

$$\sigma = \sqrt{\bar{n}} = 10 \tag{18}$$

und darf nicht mit dem Fehler des Mittelwertes $\Delta \bar{n}$ verwechselt werden.