TECHNISCHE UNIVERSITÄT
IN DER KULTURHAUPTSTADT EUROPAS
CHEMNITZ

Professur Psychologie digitaler Lernmedien

Institut für Medienforschung

Philosophische Fakultät

Statistik II

Mixed-Design ANOVA und ANCOVA

Dangerous Minds (1995). Buena Vista International.

Prof. Dr. Günter Daniel Rey

Überblick

- Einführung
- Mixed-Design ANOVA
- ANCOVA

Einführung (z. B. Rasch, Friese, Hofmann & Naumann, 2021; Rey, 2020)

- Varianzanalyse (engl. analysis of variance, ANOVA): Statistisches Verfahren zum simultanen Vergleich mehrerer Mittelwerte
- Einfaktorielle vs. mehrfaktorielle Varianzanalyse
  - Einfaktorielle Varianzanalyse: Varianzanalyse zu einem einfaktoriellen Versuchsdesign
  - Mehrfaktorielle Varianzanalyse: Varianzanalyse zu einem mehrfaktoriellen Versuchsdesign
- Ohne vs. mit Messwiederholung
  - Varianzanalyse ohne Messwiederholung: Varianzanalyse für voneinander unabhängige Messungen
  - Varianzanalyse mit Messwiederholung: Varianzanalyse für voneinander abhängige Messungen

Mixed-Design ANOVA

- Mixed-Design ANOVA (Split-Plot-ANOVA oder Mischfaktorielle ANOVA): Varianzanalyse zu einem mehrfaktoriellen Versuchsdesign, welches sowohl messwiederholte Faktoren als auch nicht-messwiederholte Faktoren enthält
- Zur Erinnerung: Thema bereits in der Sitzung zur Varianzanalyse mit Messwiederholung (Statistik I) angerissen
- Nachfolgende Folien: Zur Wiederholung und Illustration einer spezifischen Mixed-Design ANOVA, der zweifaktoriellen Varianzanalyse mit Messwiederholung auf einem Faktor

Varianzanalyse mit Messwiederholung
(z. B. Rasch, Friese, Hofmann & Naumann, 2021)

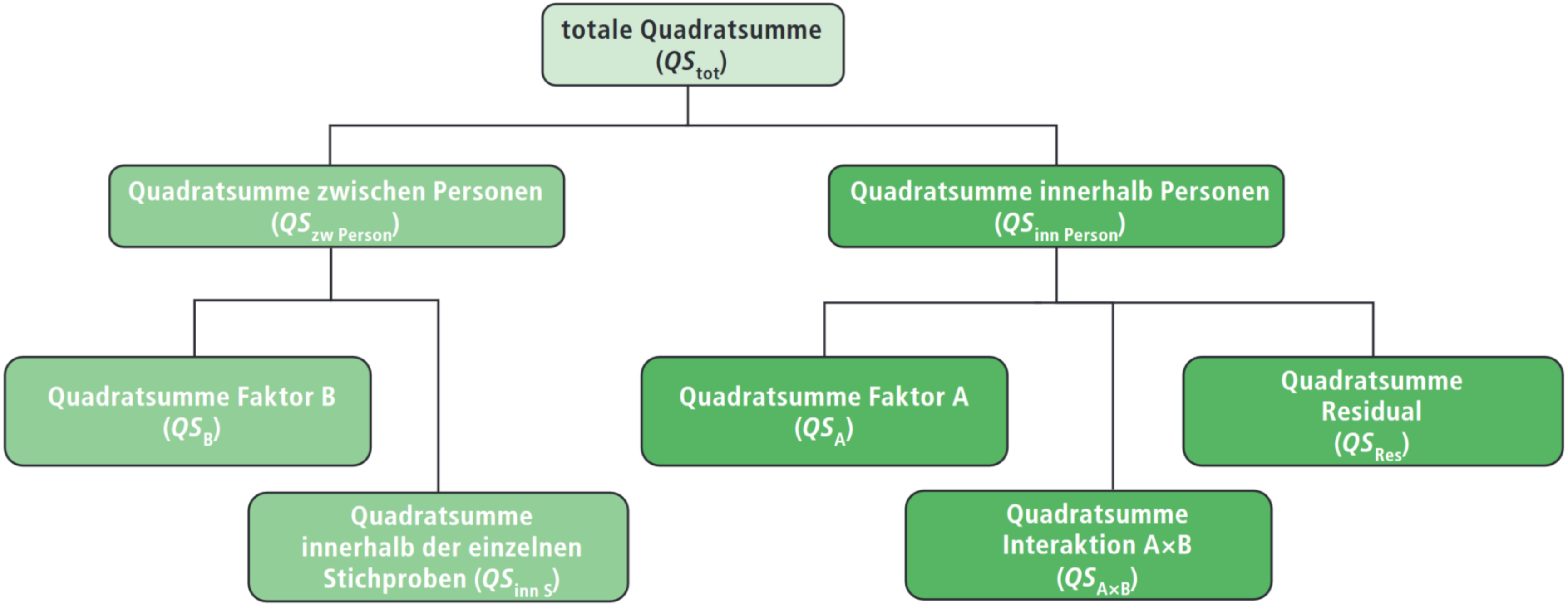
- Zerlegung der Gesamtvarianz aller Messwerte in Personenvarianz, Effektvarianz und Residualvarianz (Fehlervarianz)
- Personenvarianz: Varianz, die auf systematische Unterschiede zwischen den Versuchspersonen zurückzuführen ist
- Effektvarianz: Varianz, die durch den Einfluss der experimentellen Faktoren (und deren Wechselwirkungen) verursacht wird
- Residualvarianz: Varianz, die nicht erklärt werden kann und die sich aus zwei Komponenten zusammensetzt (auf Stichprobenebene nicht voneinander trennbar)
  - Wechselwirkung zwischen dem Personenfaktor und den Stufen des messwiederholten Faktors
  - Restliche unsystematische Einflüsse

Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung auf einem Faktor (z. B. Rasch et al., 2021)

- Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung auf einem Faktor: Varianzanalyse mit einer messwiederholten und einer nicht messwiederholten unabhängigen Variable
- Zerlegung der Gesamtvarianz aller Messwerte in Personenvarianz, Effektvarianzen des messwiederholten und des nicht messwiederholten Faktors und deren Wechselwirkung sowie der Residualvarianz (Fehlervarianz)
- Residualvarianz: Varianz, die nicht erklärt werden kann und die sich aus zwei Komponenten zusammensetzt (auf Stichprobenebene nicht voneinander trennbar)
  - Wechselwirkung zwischen dem Personenfaktor und den Stufen des messwiederholten Faktors
  - Restliche unsystematische Einflüsse

Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung auf einem Faktor (Bühner & Ziegler, 2017)

- Quadratsummenzerlegung bei der zweifaktoriellen ANOVA mit Messwiederholung (gemischtes Design)



Quelle: Bühner und Ziegler (2017)

Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung auf einem Faktor (z. B. Rasch et al., 2021)

- Formeln zur Berechnung der Quadratsummen (vgl. Vorlesung 8. Mehrfaktorielle Varianzanalyse (ohne MW)) für…
- den nicht messwiederholten Faktor A

$$QS_{A(\text{nicht } mw)} = \sum_{i=1}^{p} n \cdot q \cdot (\bar{A}_i - \bar{G})^2$$

- den messwiederholten Faktor B

$$QS_{B(\text{mw})} = \sum_{j=1}^{q} n \cdot p \cdot \left(\bar{B}_j - \bar{G}\right)^2$$

- die Wechselwirkung

$$QS_{AxB(\text{mw})} = \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{p} n \cdot \left[\bar{A}\bar{B}_{ij} - (\bar{A}_i + \bar{B}_j - \bar{G})\right]^2$$

p = Anzahl an Faktorstufen des Faktors A
n = Anzahl an Versuchspersonen in einer Gruppe
q = Anzahl an Faktorstufen des Faktors B
$\bar{A}_i$ = Mittelwert der Gruppe i
$\bar{G}$ = Gesamtmittelwert
$\bar{B}_j$ = Mittelwert der Gruppe j

Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung auf einem Faktor (z. B. Rasch et al., 2021)

- Unterschied zu anderen Varianzanalysen (ein- und mehrfaktorielle Varianzanalysen ohne MW; einfaktorielle Varianzanalyse mit MW): (Prüf-)Quadratsumme im Nenner des *F*-Wertes <u>nicht</u> mehr bei allen Effekten gleich, sondern unterschiedlich
- Grund: Erwartungswerte der systematischen Varianzen bzw. Quadratsummen unterscheiden sich, je nachdem, ob messwiederholter Faktor beteiligt ist oder nicht
- Folge: Berechnung unterschiedlicher (Prüf-)Quadratsummen (in Abhängigkeit der zu testenden Effekte)

Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung auf einem Faktor (z. B. Rasch et al., 2021)

- Formeln zur Berechnung der (Prüf-) Quadratsummen (Quadratsummen im Nenner des F-Wertes) für…
- den nicht messwiederholten Faktor A

$$QS_{VpninS} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{m=1}^{n} q \cdot (\bar{A}\bar{P}_{im} - \bar{A}_i)^2$$

- den messwiederholten Faktor B sowie für die Wechselwirkung

$$QS_{BxVpn} = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} \sum_{m=1}^{n} \left[x_{ijm} - (\bar{A}\bar{B}_{ij} + \bar{A}\bar{P}_{im} - \bar{A}_i)\right]^2$$

p = Anzahl an Faktorstufen des Faktors A
n = Anzahl an Versuchspersonen in einer Gruppe
q = Anzahl an Faktorstufen des Faktors B
$\bar{A}_i$ = Mittelwert der Gruppe *i* des Faktors A
$\bar{P}_{im}$ = Mittelwert der Versuchsperson *im*
x_{ijm} = Wert der Person *m* unter der Faktorstufenkombination *i* des Faktors A und *j* des Faktors B
$\bar{A}\bar{B}_{ij}$ = Mittelwert unter der Faktorstufenkombination *i* des Faktors A und *j* des Faktors B

Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung auf einem Faktor (z. B. Rasch et al., 2021)

- Berechnung der empirischen F-Werte: Wie bekannt gilt:

$$F = \frac{\frac{QS_{Zähler}}{df_Z}}{\frac{QS_{Nenner}}{df_N}}$$

F	= Empirischer *F*-Wert
$QS_{Zähler}$	= Quadratsumme des Zählers
QS_{Nenner}	= Quadratsumme des Nenners
df_Z	= Zählerfreiheitsgrade
df_N	= Nennerfreiheitsgrade

- Für die Haupteffekte A und B sowie die Wechselwirkung A x B:

$$F_A = \frac{\frac{QS_{A(\text{nicht } mw)}}{df_A}}{\frac{QS_{VpninS}}{df_{VpninS}}}$$

$$F_B = \frac{\frac{QS_{B(\text{mw})}}{df_B}}{\frac{QS_{BxVpn}}{df_{BxVpn}}}$$

$$F_{AxB} = \frac{\frac{QS_{\text{AxB(mw)}}}{df_{AxB(mw)}}}{\frac{QS_{BxVpn}}{df_{BxVpn}}}$$

Kovarianzanalyse – Einführung
(Bortz & Schuster, 2010; Leonhart, 2022)

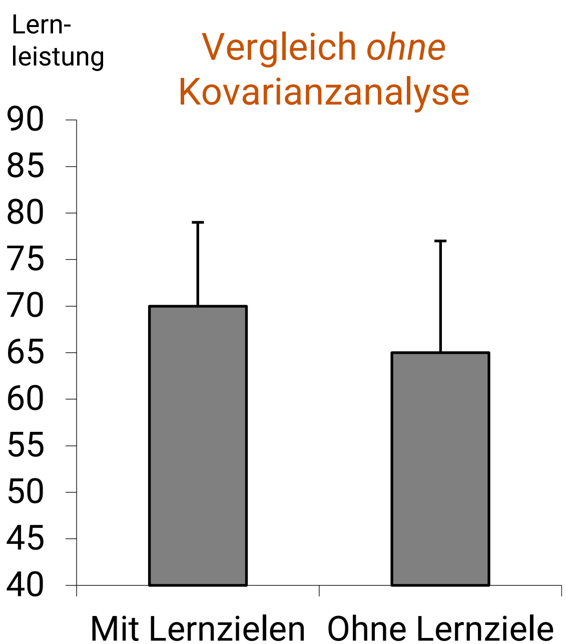
- (Einfaktorielle) Kovarianzanalyse (engl. analysis of covariance, ANCOVA): Varianzanalyse, bei welcher der Einfluss einer (metrischen) Drittvariablen (hier: Kovariate) auf die abhängige Variable (AV) rechnerisch konstant gehalten, d. h. herausgerechnet (herauspartialisiert) wird
- Alternativbezeichnungen zur Herauspartialisierung: Rechnerische Konstanthaltung; Neutralisierung; Eliminierung; Bereinigung (des Einflusses einer Kovariaten auf die AV)

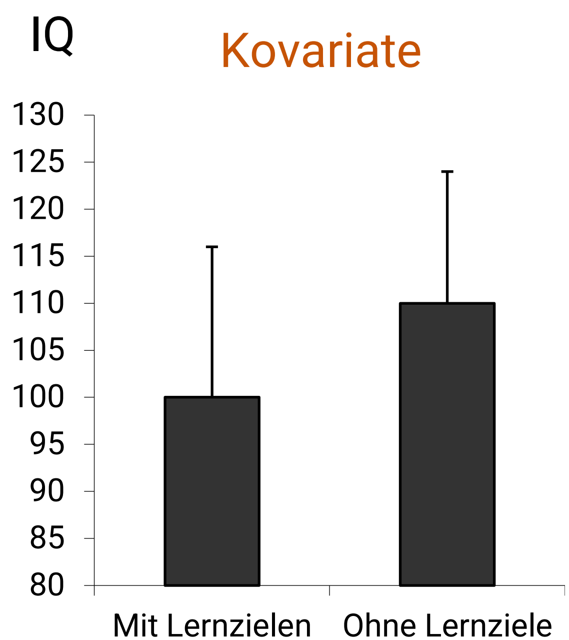
Kovarianzanalyse – Einführung (Bortz & Schuster, 2010; Leonhart, 2022)

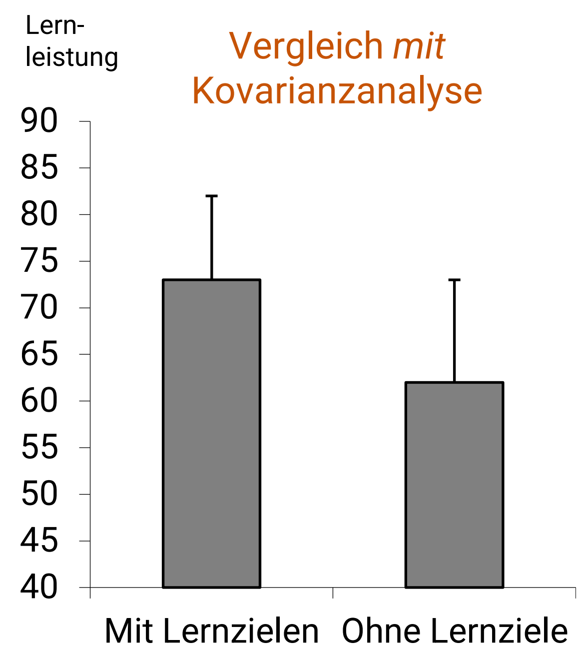
- Mögliche Gründe für den Einsatz von Kovarianzanalysen
  - Experimentelle Konstanthaltung der Variablen aus wirtschaftlichen oder ethischen Gründen nicht möglich
  - Erhöhter Zeit- und Kostenaufwand durch Erhöhung des Stichprobenumfanges (aufgrund des komplexeren Versuchsdesigns)
- Einfaktorielle vs. mehrfaktorielle Kovarianzanalyse: Nachfolgend nur Erörterung der einfaktoriellen Kovarianzanalyse

Kovarianzanalyse – Beispiel (Rey, 2020)

- Beispiel: In einer Studie zu Lernspielen (mit vs. ohne Lernziele) soll der Einfluss der Intelligenz der Teilnehmenden herausgerechnet werden
- Fiktiver Datensatz: Lernspiele mit vs. ohne Lernziele und IQ als Kovariate







Kovarianzanalyse – Bildhafte Darstellung der Auswirkungen (Leonhart, 2022)

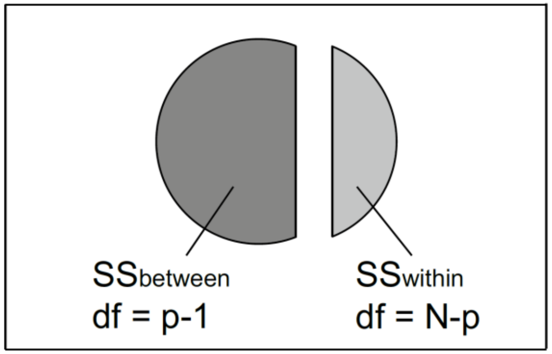


Abbildung 20.2: Einfaktorielle Varianzanalyse bildhaft dargestellt

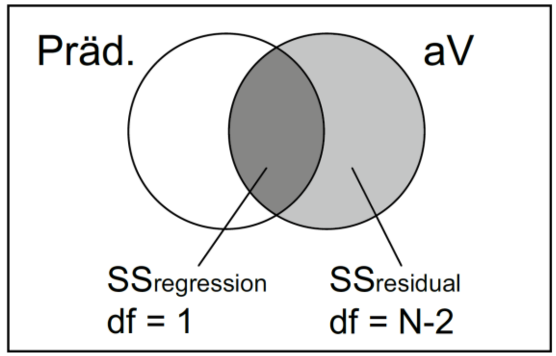


Abbildung 20.3: Lineare Regression bildhaft dargestellt

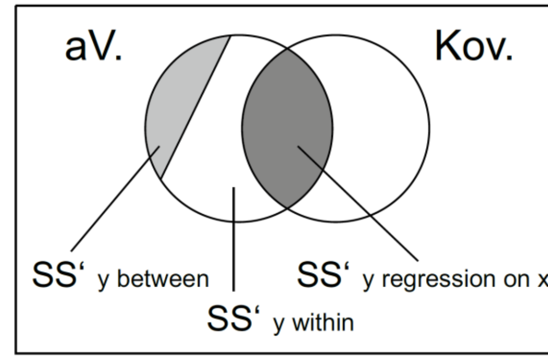


Abbildung 20.4: Kovarianzanalyse; Kovariate reduziert Fehlervarianz

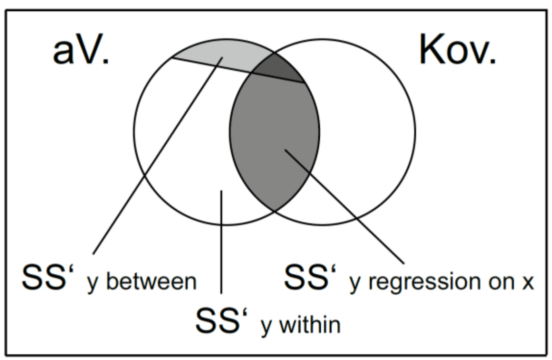


Abbildung 20.5: Kovarianzanalyse; Kovariate und Faktor korrelieren

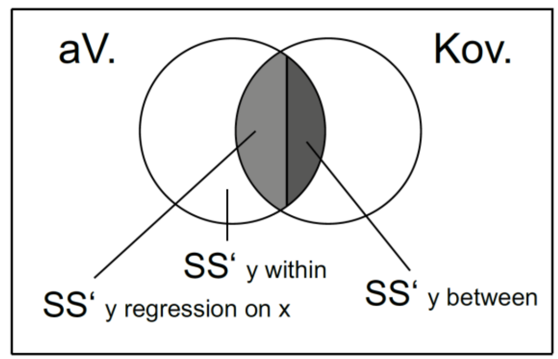


Abbildung 20.6: Kovarianzanalyse; Kovariate reduziert durch den Faktor erklärte Varianzanteile

Quellen: Leonhart (2022)

Kovarianzanalyse – Voraussetzungen für einen Einflusss und Auswirkungen (Rey, 2020)

- Voraussetzungen für einen Einfluss der Kovarianzanalyse auf die Ergebnisse
  - Unterschiedliche Mittelwerte der Kovariaten für die einzelnen Bedingungskombinationen
  - Korrelation der Kovariaten mit der AV
- Mögliche Auswirkungen der Kovarianzanalyse: Unterschiede zwischen verschiedenen Versuchsbedingungen…
  - verändern sich nicht
  - verstärken sich
  - verringern sich

Kovarianzanalyse

Lernstudie zum Einfluss von Pausen in Animationen: Nach der Erhebung zeigt sich, dass die Studierenden unter der Bedingung mit Pausen besser gelernt, aber auch mehr Vorwissen besessen haben als in der KG ohne Pausen. Das Vorwissen wird daher als Kovariate berücksichtigt.

Wie beeinflusst dies voraussichtlich die Ergebnisse?

- ☐ A: Der lernförderliche Pausen-Effekt wird stärker.
- ☐ B: Der lernförderliche Pausen-Effekt wird schwächer.
- ☐ C: Der lernförderliche Pausen-Effekt wird stärker und dadurch signifikant.
- ☐ D: Der lernförderliche Pausen-Effekt wird schwächer und dadurch nicht mehr signifikant.

Kovarianzanalyse – Inferenzstatistische Überprüfung (Bortz & Schuster, 2010)

- Inferenzstatistische Überprüfung der Varianzverhältnisse mit Hilfe des *F*-Wertes
- Berechnung des empirischen *F*-Wertes: Wie bei der einfaktoriellen Varianzanalyse mit veränderten Quadratsummen und Freiheitsgraden
- Quadratsumme zwischen den Zellen (Treatmentquadratsumme): Berechnung über folgende Differenz:

$$QS^*_{Zwischen} = QS^*_{Total} - QS^*_{Innerhalb}$$

*	= … „nach" Bereinigung des Einflusses der Kovariaten auf die AV
QS^*_{Total}	= Totale Quadratsumme…
$QS^*_{Zwischen}$	= Quadratsumme zwischen den Zellen…
$QS^*_{Innerhalb}$	= Quadratsumme innerhalb der Zellen…

Kovarianzanalyse – Inferenzstatistische Überprüfung (Bortz & Schuster, 2010)

- Quadratsumme innerhalb der Zellen (Fehlerquadratsumme): Wie bei der einfaktoriellen Varianzanalyse nur „nach“ vorheriger Bereinigung der Mittelwertunterschiede (verursacht durch die Kovariate) zwischen den einzelnen Versuchsgruppen
- Freiheitsgrade: Bleiben nahezu unverändert
  - Zählerfreiheitsgrade: Unverändert: $df_Z = p - 1$
  - Nennerfreiheitsgrade: Einen Freiheitsgrad weniger: $df_N = p \cdot (n - 1) - 1$

Inferenzstatistische Voraussetzungen der Kovarianzanalyse (Bortz & Schuster, 2010)

- Voraussetzungen entsprechen denen der Varianzanalyse
  - Unabhängigkeit der Messwerte in den einzelnen Bedingungen (bei nicht messwiederholten Versuchsdesigns)
  - Intervallskalenniveau der AV
  - Normalverteilung der AV in der Population (getrennt für jede Versuchsbedingung oder auf Basis der Residuen)
  - Varianzhomogenität als Gleichheit der Populationsvarianzen, aus denen die Stichproben stammen
- Außerdem: Annahme homogener Steigungen der Regressionen innerhalb der Stichproben
- Robustheit: Kovarianzanalyse reagiert bei ungefähr gleichgroßen Stichproben der Gruppen relativ robust gegenüber Verletzungen der Voraussetzungen

Beispiele für Mixed-Design ANOVA und ANCOVA in Fachzeitschriften

receiving the sad mood induction (Hypothesis 2b). Mixed-design ANOVAs with the between-subject variables personalization and mood and the within-variable PAS (PAS 1 to PAS 2) or NAS (NAS 1 to NAS 2), respectively, were conducted. For PAS, results revealed no

Quelle: Kühl und Münzer (2021)

Table 6 presents the adjusted means and standard errors across groups for near transfer, far transfer, and error correction rate. To test for differences across groups, we conducted one-way ANCOVA with group as the between-subjects factor, prior knowledge and perceived difficulty as covariates, and near transfer performance, far transfer performance, and error correction rate as dependent variables.

For near transfer, the ANCOVA was statistically significant, $F(2,68) = 3.51$, $p = 0.036$. Planned pairwise tests revealed that the scaffolded self-explanation group performed significantly better than the control group ($p = 0.016$, $d = 0.73$), and the standard self-explanation group, ($p = 0.037$, $d = 0.62$). There was no significant difference between the control and standard self-explanation group ($p = 0.704$). For far transfer, the ANCOVA was not statistically significant, $F(2,68) = 0.10$, $p = 0.902$.

Finally, for error correction rate, the ANCOVA was statistically significant, $F(2,68) = 3.84$, $p = 0.026$. Planned pairwise tests revealed that the scaffolded self-explanation group performed significantly better than the control group ($p = 0.021$, $d = 0.70$), and the standard self-explanation group ($p = 0.015$, $d = 0.73$). There was no significant difference between the control group and the scaffolded self-explanation group ($p = 0.892$).

Quelle: Zhang und Fiorella (2024)

Zusammenfassung

- Varianzanalysen als statistische Verfahren zum simultanen Vergleich mehrerer Mittelwerte
- Mixed-Design ANOVA als Varianzanalyse zu einem mehrfaktoriellen Versuchsdesign, welches sowohl messwiederholte Faktoren als auch nicht-messwiederholte Faktoren enthält
- ANCOVA als Varianzanalyse, bei welcher der Einfluss einer Kovariaten auf die AV herauspartialisiert wird

Prüfungsliteratur

- Rasch, B., Friese, M., Hofmann, W., & Naumann, E. (2021). *Quantitative Methoden 2: Einführung in die Statistik für Psychologie, Sozial- & Erziehungswissenschaften* (5. Aufl.). Heidelberg: Springer.
  - Varianzanalyse mit Messwiederholung (S. 77–102)
- Leonhart, R. (2022). *Lehrbuch Statistik. Einstieg und Vertiefung* (5. Auflage). Bern: Huber.
  - Kovarianzanalyse (S. 581–600)
- Rey, G. D. (2020). *Methoden der Entwicklungspsychologie. Datenerhebung und Datenauswertung* (3., überarbeitete Auflage). Norderstedt BoD.

(Unter-)Kapitel	Taschenbuch	E-Book (ePUB)	Webseite
Kovarianzanalyse	S. 107–109	S. 87–88	S. 96

Weiterführende Literatur I

- Bühner, M., & Ziegler, M. (2017). *Statistik für Psychologen und Sozialwissenschaftler* (2. Aufl.). Hallbergmoos: Pearson Studium.
  - Grundprinzip und Vorgehen bei der zweifaktoriellen Varianzanalyse mit Messwiederholung (gemischtes Design) (S. 536–573)
- Bortz, J., & Schuster, C. (2010). *Statistik für Human- und Sozialwissenschaftler* (7. Aufl.). Berlin: Springer.
  - Versuchspläne mit Messwiederholungen (S. 285–304)
  - Kovarianzanalyse (S. 305–323)
- Eid, M., Gollwitzer, M., & Schmitt, M. (2017). *Statistik und Forschungsmethoden* (5. Aufl.). Weinheim: Beltz.
  - Zweifaktorielle Varianzanalyse mit Messwiederholung auf einem Faktor (S. 492–499)
  - Gemeinsame Analyse kategorialer und metrischer unabhängiger Variablen (S. 690–703)