Übung 3

Aufgabe 1: Bewegungsgleichungen eines Satelliten – Dreikörperproblem

Leiten Sie die Bewegungsgleichungen eines Satelliten im gemeinsamen Gravitationsfeld zwischen Erde und Mond her.

Aufgabe 2: Interpretation von RKV als Quadraturformel

Wir betrachten in dieser Aufgabe nur AWPe bei denen die rechte Seite f lediglich von der Zeit t abhängt.

(a) Zeigen Sie: Hat ein ESV der Form

$$y_{i+1} = y_i + h \sum_{j=1}^{s} \gamma_j \, f(t_i + \alpha_j \, h)$$

die Ordnung p, dann hat die Quadraturformel

$$Q[g] = \sum_{j=1}^{s} \gamma_j \, g(\alpha_j) \approx \int_0^1 g(x) \, \mathrm{d}x$$

den Exaktheitsgrad $p - 1$.

(b) Welche Aussage ergibt sich dadurch über den Zusammenhang zwischen der Anzahl der Stufen eines ESV und der maximal erreichbaren Konsistenzordnung des ESV?

Hinweis. Es genügt, die Aussage für die Monome t^n zu zeigen. Betrachten Sie dazu für das spezielle AWP

$$y'(t) = t^n, \quad y(0) = 0, \quad n = 0, 1, \ldots, p-1,$$

einen Schritt des gegebenen ESV. Was gilt zum Zeitpunkt h für $|y(h) - y_1|$?

Hausaufgabe 1: Implementierung von ERKV

(a) Implementieren Sie ein allgemeines explizites Runge-Kutta Verfahren (vgl. Algorithmus aus der Vorlesung) zur Lösung von Anfangswertproblemen für Systeme. Die Schnittstelle der Funktion könnte dabei wie folgt aussehen:

```
function y = erkv(f, t0, T, h, y0, a, c, B).
```

Hierbei werden neben dem `function_handle f`, der Anfangszeit `t0`, der Endzeit `T`, der festen Schrittweite `h` und dem Anfangswert `y0` $\in \mathbb{R}^n$ auch die Vektoren `a, c` $\in \mathbb{R}^s$ sowie die strikte untere Dreiecksmatrix `B` $\in \mathbb{R}^{s\times s}$ aus dem Butcher-Diagramm übergeben.

(b) Lösen Sie mit dem expliziten Eulerverfahren, mit dem verbesserten Eulerverfahren und mit dem Verfahren von Heun das AWP

$$y'(t) = \frac{t^2}{4} + y(t), \quad y(0) = 0 \tag{1}$$

auf dem Intervall $[0, 1]$. Verwenden Sie für jedes Verfahren verschiedene äquidistante Schrittweiten:

$$h_n = 0.1 \cdot 2^{-n}, \quad n = 0, 1, \ldots, 12.$$

Vergewissern Sie sich zunächst, dass $y(t) = \frac{1}{4}\left(-2 + 2\,e^t - 2\,t - t^2\right)$ die Lösung von (1) ist. Schätzen Sie jeweils die experimentelle Konvergenzordnung und zeichnen Sie den Fehler bzgl. der Norm $\|\cdot\|_{\infty,h}$ in einen doppelt-logarithmischen Plot ein. Entsprechen die Konvergenzordnungen denen von der Theorie vorhergesagten?

(c) Bestimmen Sie mittels

```
tic;
yh = erkv(..., h(n), ...);
times(n,m)=toc;
```

für jedes der Verfahren und für jede der Schrittweiten die benötigte Zeit. Zeichnen Sie den Fehler in Abhängigkeit der benötigten Zeit für die drei Verfahren in einem doppelt-logarithmischen Plot. Welches der Verfahren ist am effizientesten?

(8 Punkte)

Hausaufgabe 2: Gauß-Verfahren der Ordnung 4

Zeigen Sie unter Verwendung der Ordnungsbedingungen allgemeiner RKV (Nachrechnen der Bedingungen per Hand oder Computer-Algebra-System): Das durch das Butcher-Diagramm in gegebene Gauß-Verfahren der Ordnung 4 tatsächlich diese Konsistenzordnung hat.

$$\begin{array}{c|cc}
\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} - \frac{\sqrt{3}}{6} \\
\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} + \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{4} \\
\hline
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}
\end{array}$$

(4 Punkte)