
Übung 2

Aufgabe 1: Praktische Durchführung des impliziten Euler-Verfahrens

Bei der Durchführung des impliziten Euler-Verfahrens muss in jedem Schritt das nicht-lineare Gleichungssystem

$$\Phi(t, y, h) = f(t + h, y + h \Phi(t, y, h)).$$

gelöst werden.

- Dieses System hat die Form einer Fixpunktgleichung. Diskutieren Sie die zugehörige Fixpunktiteration mit Hilfe des Banachschen Fixpunktsatzes.
- Das Newton-Verfahren ist ein effizienteres Verfahren zum Lösen nichtlinearer Systeme. Geben Sie die entsprechende Verfahrensvorschrift sowie einige Eigenschaften des Newton-Verfahrens an. Durch welche Modifikationen kann das Newton-Verfahren für die praktische Rechnung angepasst werden?

Aufgabe 2: Lipschitz-Stetigkeit zweier Verfahrensfunktionen

Es sei die Generalvoraussetzung (a) erfüllt. Zeigen Sie, dass die Verfahrensfunktion

- des impliziten Eulerverfahrens für h klein genug und
 - des Verfahrens von Heun
- die Lipschitzbedingung

$$\|\Phi(t, y, h) - \Phi(t, z, h)\| \leq K \|y - z\|$$

erfüllen.

Hausaufgabe 1: Beispiel mit nichtglatter rechter Seite

- Zeigen Sie, dass das verbesserte Euler-Verfahren (c) Konsistenzordnung 2 hat.
- Bestimmen Sie für das AWP (1) analytisch die exakte Lösung.

$$y'(t) = f(y(t)) \text{ fast überall in } [0, 1], \quad y(0) = 1, \quad (1)$$

mit

$$f(y) := \begin{cases} y & \text{für } y \leq y_s \\ 2y & \text{für } y > y_s \end{cases}, \quad y_s > 1.$$

Dabei muss man Unstetigkeitsstellen von $f(y(t))$ erwarten. Daher fordern wir an diesen (endlich vielen) Stellen nur Stetigkeit von $y(t)$. Die Dgl (1) soll daher (nur) fast überall in $[0, 1]$ gelten.¹

Hinweis: Für konstantes $\lambda \in \mathbb{R}$ genügt die Lösung der Dgl $y' = \lambda y$ dem Ansatz $y(t) = c \exp(\lambda t)$ mit $c \in \mathbb{R}$.

- (c) Implementieren Sie das verbesserte Euler-Verfahren. Lösen Sie das AWP (1) für
- (i) $y_s = 4$,
 - (ii) $y_s = 1.5$,
 - (iii) $y_s = \exp(71/128)$

mit dem expliziten Euler-Verfahren und dem verbesserten Euler-Verfahren mit den äquidistanten Schrittweiten

$$h_n = 2^{-n}, \quad n = 1, 2, \dots, 12.$$

Stellen Sie die Schrittweiten und die Normen $\|\cdot\|_{\infty, h}$ des resultierenden Fehlers beider Verfahren in einem doppelt logarithmischen Plot dar (für jedes y_s ein Plot).

- (d) Leiten Sie noch einmal die Approximation der *Experimental Order of Convergence* mittels der Approximation als „kleinsten Quadrate“ Problem her, wobei die Parameter die Konstante C und die Konvergenzordnung p sind.
- (e) Nutzen Sie die Matlab Funktion `eoc.m` und interpretieren Sie die Konvergenzordnungen.

(10 Punkte)

Hausaufgabe 2: Verfahren bei von y unabhängiger rechter Seite

Wenden Sie sowohl das explizite als auch das implizite Euler-Verfahren auf das AWP

$$y'(t) = f(t), \quad y(0) = 0 \tag{2}$$

an, bei dem die rechte Seite nicht von y abhängt. Welche bekannten Rechenverfahren ergeben sich dadurch? Überlegen Sie sich umgekehrt, durch welches Verfahren sich das Verfahren von Heun zur Lösung von (2) erzeugen lässt. Veranschaulichen Sie alle drei Situationen grafisch. (4 Punkte)

¹Diese Forderungen kann man unter Verwendung von verallgemeinerten Ableitungen sauber begründen.