Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik – Professur Wissenschaftliches Rechnen
Prof. Dr. Martin Stoll, Dominik Alfke

Sommersemester 2018

Einführung in die Numerik – Aufgabenblatt 7.

Problem 1 **(Hausaufgabe, 4 Punkte)**

Es seien $n+2$ Polynome $p_k \in \Pi^k$ definiert durch die Rekursion

$$\begin{aligned} p_{-1}(x) &= 0, \\ p_0(x) &= 1, \\ p_k(x) &= (a_k x + b_k)p_{k-1}(x) - c_k p_{k-2}(x) && \forall\, k = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}$$

(a) Schreiben Sie dies äquivalent als

$$xp(x) = Tp(x) + v(x)$$

mit $p = [p_0, p_1, \ldots, p_{N-1}]^T$, einer (von x unabhängigen) Matrix T und einem (von $p(x)$ unabhängigen) Vektor $v(x)$. Welche Struktur hat diese Matrix?

(b) Nehmen Sie an, dass p_n n verschiedene Nullstellen $x_1, \ldots, x_n$ hat. Diese werden beispielsweise für die Gauß-Quadratur benötigt. Nutzen Sie (a), um ein Verfahren anzugeben, mit dem man die Nullstellen numerisch nur anhand der Koeffizienten a_k, b_k, c_k berechnen kann, ohne das Polynom aufzustellen oder auszuwerten.

Problem 2 **(Hausaufgabe, 4 Punkte)**

Wir betrachten die Newton-Cotes-Formeln für die numerische Integration einer Funktion f auf dem Intervall $[a, b]$.

(a) Leiten Sie die '3/8'-Regel her ($n = 3$).

(b) Teilen Sie das Intervall in m gleich lange Teilintervalle auf und wenden Sie die Simpsonregel ($n = 2$) auf jedem Teilintervall an, um die zugesammengesetzte Simpsonregel zu erhalten. Geben Sie an, wie viele unterschiedliche Auswertungsstellen $x_0, \ldots, x_N$ insgesamt benötigt werden, und bringen Sie die Quadraturformel in die Form

$$I \approx \sum_{i=0}^{N} \alpha_i f(x_i).$$

Problem 3

In Problem 2 vom Übungsblatt 5 haben wir gezeigt, dass für die Chebyshev-Polynome gilt

$$\begin{aligned} p_0(x) &= 1, \\ p_1(x) &= x, \\ p_k(x) &= 2xp_{k-1}(x) - p_{k-2}(x) \qquad\qquad \forall\, k = 2, 3, \ldots. \end{aligned}$$

und dass die Nullstellen von p_n gegeben sind durch

$$x_k = \cos\left(\frac{k - 1/2}{n}\pi\right) \qquad (k = 1, \ldots, n).$$

Berechnen Sie diese Nullstellen alternativ in Matlab durch das Verfahren aus Problem 1 und werten Sie die Abweichung für verschiedene n aus.

Problem 4

Approximieren Sie das Integral

$$I = \int_0^1 \cos(x)\mathrm{d}x$$

in Matlab durch die folgenden Verfahren (mit festem geraden n):

- Zusammengesetzte Trapezregel auf n Teilintervallen, also mit Funktionsauswertungen in $n + 1$ Stützstellen
- Zusammengesetzte Simpsonregel auf $n/2$ Teilintervallen, also ebenfalls mit Funktionsauswertungen in $n + 1$ Stützstellen
- Ein Schritt der Romberg-Integration aufbauend auf der Trapezregel einmal auf $n/2$, einmal auf n Teilintervallen ($k = 1$, $h_0 = \frac{b-a}{n/2}$, $h_1 = \frac{b-a}{n}$)
- Zum Vergleich: Die Matlab-Funktion `integral`, sh. `help integral`

Geben Sie den Fehler gegenüber der exakten Lösung $I = \sin(1)$ für verschiedene Werte von n an.