Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik – Professur Wissenschaftliches Rechnen
Prof. Dr. Martin Stoll, Dominik Alfke

Sommersemester 2018

Einführung in die Numerik – Aufgabenblatt 4.

Problem 1

Der MATLAB-Befehl `A=gallery('poisson',50,50);` lädt eine 2500×2500-Matrix, die aus der Diskretisierung des zweidimensionalen Laplace-Operators entsteht. Diese Matrix ist schwach besetzt, d.h. die meisten Elemente sind Null.

(a) Implementieren Sie das Cholesky-Verfahren aus der Vorlesung und testen Sie dies an `A`. Geben Sie dazu die Residuumsnorm $\|A - LL^T\|$ an, die Sie erzielen.

(b) Testen Sie die MATLAB-eigene Cholesky-Implementation anhand von zwei verschiedenen Methoden:

- `L = chol(A,'lower');`
- `p = amd(A); Lp = chol(A(p,p), 'lower');`

Vergleichen Sie die Besetzheitsstrukturen der beiden Matrizen, die Sie sich mittels des `spy`-Befehls ansehen können. Was können Sie über die Anzahl der Nichtnullelemente (*nnz* im `spy`-Plot) der Matrizen `L` und `Lp` aussagen? Was könnte die Ursache sein?

Problem 2 (Hausaufgabe, 4 Punkte)

Das Richardson-Verfahren ist ein elementares Iterationsverfahren, bei dem $M = \frac{1}{\alpha} I$ und $N = M - A$ mit einem Parameter $\alpha > 0$ gewählt wird.

(a) Implementieren Sie die Richardson-Iteration, die Jacobi-Iteration und die Gauss-Seidel-Iteration in drei MATLAB-Funktionen, die eine Approximation an die Lösung von $Ax = b$ zurückgeben. Die Eingabeparameter der Funktionen sollen die Systemmatrix `A`, die rechte Seite `b`, die Anzahl an durchgeführten Iterationen `N` und im Falle der Richardson-Iterationen der Parameter `alpha` sein.

(b) Testen sie Ihren Code anhand der durch `A=gallery('poisson',p)` erstellten dünn besetzten Matrix der Größe $p^2 \times p^2$ mit der rechten Seite `b=sum(A,2)`. Messen Sie dafür die benötigte Laufzeit mit `tic;` und `toc;` und die Residuumsnorm mit `norm(A*x-b)`. Werten Sie die Ergebnisse für $p \in \{10, 25, 100\}$ und $N \in \{10, 100, 1000, 10000, 100000\}$ sowie $\alpha \in \{0.01, 0.1, 0.25, 0.26\}$ aus. Beschreiben Sie grob, wie sich die Laufzeiten und Genauigkeiten entwickeln und welche Vor- und Nachteile die verschiedenen Methoden haben.

Hinweis: Sie müssen für Teil (b) keinen Code, sondern nur eine schriftliche Beschreibung einreichen.

Problem 3 (Hausaufgabe, 4 Punkte)

Sei A eine strikt Zeilen-diagonaldominante Matrix, d.h. es existiert ein $0 < \gamma < 1$, sodass für alle $i = 1, \ldots, n$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^{n} |a_{ij}| \leq \gamma |a_{ii}|.$$

Zeigen Sie, dass die Jacobi-Iteration angewandt auf A immer konvergiert.

Problem 4

(a) Zeigen Sie dass die Eigenpaare (λ_i, v_i) der Matrix

$$T_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & -1 & & \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ & & -1 & \alpha \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$$

für $i = 1, \ldots, n$ gegeben sind durch

$$\lambda_i = \alpha - 2\cos(i\theta), \qquad v_i = \begin{bmatrix} \sin(i\theta) & \sin(2i\theta) & \cdots & \sin(ni\theta) \end{bmatrix}^T$$

mit $\theta = \frac{\pi}{n+1}$.

(b) Betrachten Sie für ein Gleichungssystem $Ax = b$ die *gedämpfte Jacobi-Iteration*

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega D^{-1}(b - Ax^{(k)}),$$

wobei D wie in der Vorlesung den Diagonalteil von A bezeichnet. Geben Sie an, für welche $\omega \in \mathbb{R}$ diese Iteration angewendet auf die Matrix $A = T_2$ konvergiert. Wie unterscheiden sich die Konvergenzgeschwindigkeiten für die Werte $\omega = 1$ und $\omega = 2/3$?