Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik – Professur Wissenschaftliches Rechnen
Prof. Dr. Martin Stoll, Dominik Alfke

Sommersemester 2018

Einführung in die Numerik – Aufgabenblatt 2.

Problem 1

Zeigen Sie, dass die Multiplikation und Division

$$y = f_1(x_1, x_2) = x_1 * x_2 \qquad \text{und} \qquad y = f_2(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2}$$

gut gestellte Aufgaben sind.

Problem 2

Schreiben Sie eine Matlab-Funktion zur Approximation der Exponentialfunktion über den Ausdruck

$$T_l(x) = \sum_{k=0}^{l} \frac{x^k}{k!}.$$

Testen Sie diese Funktion in einem Skript, das einen `loglog`-Plot mit sechs Kurven erstellt. Jede Kurve soll darstellen, wie sich für ein $x \in \{-100, -10, -1, 1, 10, 100\}$ der relative Fehler

$$\frac{|T_l(x) - \exp(x)|}{\exp(x)}$$

in Abhängigkeit von l entwickelt. Wählen Sie dafür 30 Auswertungspunkte für l zwischen 1 und 10000. Erklären Sie, warum die Ergebnisse für negative x so unbefriedigend sind. Modifizieren Sie ihre Funktion, um dieses Verhalten zu vermeiden.

Problem 3 **(Hausaufgabe, 4 Punkte)**

Ein wichtiges Werkzeug in der Numerischen Linearen Algebra sind Ähnlichkeitstransformationen der Originalmatrix A, um eine Matrix SAS^{-1} mit bestimmten erwünschten Eigenschaften erhalten. Givens-Rotationen sind die Transformationen mit Matrizen der Form

$$G(i,k,\theta) = \begin{array}{cc}
\begin{bmatrix}
1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & c & \cdots & s & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & -s & \cdots & c & \cdots & 0 \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1
\end{bmatrix}
&
\begin{array}{l}
\\ \\ \leftarrow i\text{-te Zeile} \\ \\ \leftarrow k\text{-te Zeile} \\ \\ \\
\end{array}
\\
\begin{array}{ccccccc}
 & & \uparrow & & \uparrow & & \\
 & & i\text{-te Spalte} & & k\text{-te Spalte} & &
\end{array}
&
\end{array} \tag{1}$$

mit $c = \cos(\theta)$ und $s = \sin(\theta)$. Gegeben sei ein Vektor x. Leiten Sie Formeln für θ (oder c und s) in Abhängigkeit von x her, sodass der k-te Eintrag von $G(i,k,\theta) \cdot x$ null wird. Zeigen Sie außerdem, dass G eine orthogonale Matrix ist.

Problem 4 **(Hausaufgabe, 6 Punkte)**

(a) Implementieren Sie ihre Lösung von Problem 3 in einer Matlab-Funktion

```
function G = givensrot(x, i, k)
```

für einen Vektor `x` und Indizes `i` und `k`, sodass `G` die Struktur wie in (1) hat und der `k`-te Eintrag von `G*x` (bis auf Rundungsfehler) null ist.

(b) Die Funktion

```
function [Q,R] = qrgivens(A)
    [m,n] = size(A);
    Q = eye(m);
    R = A;
    for i = 1:n
        for k = i+1:m
            G = givensrot(??, i, k)
            R = G*R;
            Q = Q*G';
        end
    end
end
```

soll eine QR-Zerlegung der Matrix A mit Hilfe von Givens-Rotationen durchführen. Verstehen Sie den Code und ersetzen Sie `??` durch den passenden Vektor.

(c) Schreiben Sie ein Skript, das `qrgivens` auf eine zufällige 20×20-Matrix anwendet und überprüft, mit welcher Genauigkeit die Zerlegung die folgenden Eigenschaften erfüllt:

- $A = QR$,
- Q ist eine orthogonale Matrix,
- R ist obere Dreiecksmatrix (Hinweis: `tril` oder `triu`).

Formulieren Sie die Eigenschaften dazu als Matrixgleichungen und berechnen Sie die Normen der entsprechenden Residuen.

Problem 5

Zeigen Sie, dass die Diagonalelemente einer positiv definiten Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ alle positiv sein müssen.