Technische Universität Chemnitz
Fakultät für Mathematik – Professur Wissenschaftliches Rechnen
Prof. Dr. Martin Stoll, Dominik Alfke

Sommersemester 2018

Einführung in die Numerik – Aufgabenblatt 1.

Problem 1 **(Hausaufgabe, 4 Punkte)**

Die *inverse Iteration* bezeichnet das Anwenden des Potenzverfahrens auf die inverse Matrix A^{-1}.

(a) Schreiben Sie den Algorithmus auf, ohne A^{-1} explizit zu benutzen. Benennen Sie die Kriterien für die Konvergenz des Verfahrens in Abhängigkeit von den Eigenwerten von A. Welches Eigenpaar von A kann man auf diese Weise bestimmen?

(b) In einer Anwendung sind wir an dem Eigenpaar von A interessiert, das $\sigma \in \mathbb{R}$ am nächsten ist. Modifizieren Sie die inverse Iteration, um diese Werte zu bestimmen.

Problem 2

Der MATLAB-Code

```
n = 100;
[Q,~] = qr(rand(n));
A = Q * diag(1:n) * Q';
```

erstellt eine zufällige symmetrische 100×100-Matrix mit den Eigenwerten $1, \ldots, n$.

(a) Führen Sie 20 Iterationen der Potenzmethode durch, ausgehend von einem zufälligen Startvektor `x = rand(n,1)`. Geben Sie die resultierende Approximation für den größten Eigenwert von A and und berechnen Sie den absoluten Fehler gegenüber dem tatsächlichen Wert $\lambda_{\max} = n$.

(b) Wiederholen Sie den Vorgang für die inverse Iteration aus Aufgabe 1.

(c) Welchen Unterschied stellen Sie fest? Begründen Sie anhand von bekannten Aussagen über die Konvergenzgeschwindigkeit der Potenzmethode.

Problem 3

Sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine beliebige Matrix mit $a_{ij} \geq 0$ für alle $i, j = 1, \ldots, n$ und $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1$ für alle $i = 1, \ldots, n$ (wie zum Beispiel die transponierte Übergangsmatrix P^T aus dem *Google*-Beispiel in der Vorlesung). Zeigen Sie, dass für jeden Eigenwert λ von A gilt $|\lambda| \leq 1$.

Problem 4

(a) Sei A eine $n \times n$-Matrix mit Einträgen a_{ij}. Für $i = 1, \ldots, n$ bezeichne $R_i = \sum_{j\neq i} |a_{ij}|$ die Summe der Beträge der Nebendiagonaleinträge in Zeile i, und $D_i = \{z \in \mathbb{C} : |z - a_{ii}| \leq R_i\}$ bezeichne die abgeschlossene Kreisscheibe in der komplexen Ebene mit Zentrum a_{ii} und Radius R_i. Zeigen Sie, dass jeder Eigenwert von A in wenigstens einer der Kreisscheiben D_i liegt.

(b) Zeigen Sie mittels der Aussage aus (a), dass

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 10 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 15 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 20 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 25 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 30 \end{bmatrix}$$

invertierbar ist.

(c) Eine Verschärfung dieses Theorems besagt: Wenn k dieser Kreisscheiben disjunkt von den anderen $n-k$ Kreisscheiben sind, dann enthält die Vereinigung dieser k Kreisscheiben genau k Eigenwerte (unter Berücksichtigung von Vielfachheiten). Zeigen Sie damit, dass alle Eigenwerte der Matrix A aus (b) reell sind.