TECHNISCHE UNIVERSITÄT CHEMNITZ

Fakultät für Mathematik

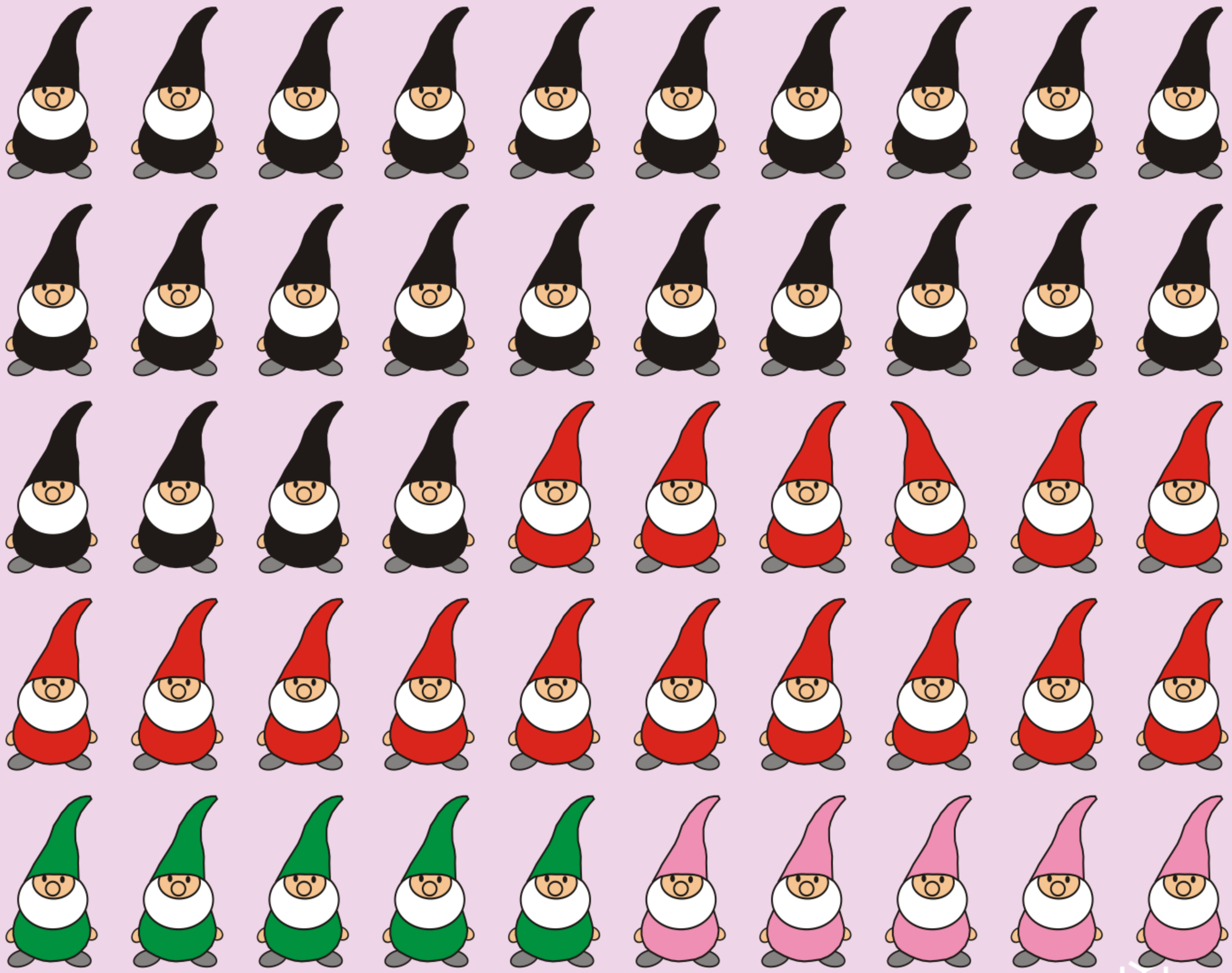
Einladung

Weihnachtsvorlesung

Im Wichtel-Parlament

Politische Machtspiele aus mathematischer Sicht

Prof. Dr. Vladimir Shikhman



Donnerstag, 8. Dezember 2016, 16.30 Uhr
Reichenhainer Str. 90, Zentrales Hörsaal- und Seminargebäude, N112

Im Wichtel-Parlament
Politische Machtspiele aus mathematischer Sicht

Vladimir Shikhman

Technische Universität Chemnitz

Fakultät für Mathematik

Professur für Wirtschfatsmathematik

WICHTEL

Anmutig und schalkhaft sind Nixen und Elfen;
Nicht so die Erdgeister, sie dienen und helfen
Treuherzig den Menschen. Ich liebte zumeist
Die welche man Wichtelmännchen heißt.

- Heinrich Heine, 1797-1856 -

Wichtelmännchen sind immer fröhlich und zu jeder Art von Scherzen aufgelegt, die niemandem schaden und immer für Heiterkeit sorgen. Sie beschenken gerne die Menschen und besonders denen, die viel Leid ertragen müssen, erleichtern sie gerne das Leben. Wichtelmännchen arbeiten mindestens zu zweit. Sie sind keine Einzelgänger, aber Familien gründen sie auch nicht.

PARTEIENLANDSCHAFT

SCHWARZ

ROT

MAGENTA

GRÜN

WICHTEL-PARLAMENT

Parteien	Stimmen	Prozente
SCHWARZ	310	49 %
ROT	193	31 %
MAGENTA	64	10 %
GRÜN	63	10 %

$\downarrow$

Insgesamt:	630 Stimmen
Entscheidung:	mehr als 315 Stimmen

Wie ist die MACHTVERTEILUNG ?

z.B. Ist **ROT** dreimal mächtiger als **MAGENTA** ?

Aber **MAGENTA** kann den **SCHWARZEN** genauso wie **ROT** helfen...

MACHT

Jede Chance, innerhalb einer sozialen Beziehung den **eigenen Willen** auch gegen Widerstreben durchzusetzen, gleichwie, worauf diese Chance beruht.

- Max Weber, 1864-1920 -

Macht entspringt der menschlichen Fähigkeit, nicht nur zu handeln oder etwas zu tun, sondern sich mit anderen zusammenzuschließen und **im Einvernehmen** mit ihnen zu handeln.

- Hannah Arendt, 1906-1975 -

MACHTVERTEILUNG VIA KOALITIONSBILDUNG

KOALITIONEN

	Anzahl von Koalitionspartnern			
	0	1	2	3
		R	**R**, M	
SCHWARZ	$\emptyset$	M	**R**, G	**R**, M, G
		G	M, G	
	1	3	3	1
	Anzahl von Koalitionen			

- Wie wahrscheinlich sind Koalitionen ?
- Welchen Koalitionen kann **SCHWARZ** entscheidend helfen ?

WAHRSCHEINLICHKEIT DER KOALITIONEN

	Anzahl von Koalitionspartnern			
	0	1	2	3
SCHWARZ	$\emptyset$	**R** M G	**R**, M **R**, G M, G	**R**, M, G
	1	3	3	1
	Anzahl von Koalitionen			

Wähle mit gleicher Wahrscheinlichkeit:

- Anzahl von Koalitionspartnern s aus $0, 1, 2, 3 \rightarrow 1/4$
- s-elementige Koalition $\rightarrow$ $\begin{array}{ccccc} s = & 0 & 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 1/3 & 1/3 & 1 \end{array}$

WAHRSCHEINLICHKEIT DER KOALITIONEN

	Anzahl von Koalitionspartnern			
	0	1	2	3
SCHWARZ	$\emptyset$	**R** M G	**R**, M **R**, G M, G	**R**, M, G
	1/4	1/12	1/12	1/4
	Warscheinlichkeit von Koalitionen			

Wähle mit gleicher Wahrscheinlichkeit:

- Warscheinlichkeit von Koalitionen s aus $0, 1, 2, 3 \rightarrow 1/4$
- s-elementige Koalition $\rightarrow$ $\begin{array}{ccccc} s = & 0 & 1 & 2 & 3 \\ & 1 & 1/3 & 1/3 & 1 \end{array}$

ENTSCHEIDENDE KOALITIONEN

	Anzahl von Koalitionspartnern			
	0	1	2	3
		R	**R**, M	
SCHWARZ	$\emptyset$	M	**R**, G	~~**R**, M, G~~
		G	M, G	
	1/4	1/12	1/12	1/4
	Warscheinlichkeit von Koalitionen			

SCHWARZ hilft einer Koalition S entscheidend, falls

- S verliert alleine $\rightarrow$ weniger als 316 Stimmen
- S gewinnt mit **SCHWARZ** $\rightarrow$ mehr als 315 Stimmen

MACHT VON **SCHWARZ**

	Anzahl von Koalitionspartnern			
	0	1	2	3
SCHWARZ	$\emptyset$	**R** M G	**R**, M **R**, G M, G	~~**R**, M, G~~
	1/4	1/12	1/12	1/4
	Warscheinlichkeit von Koalitionen			

$$1/12 + 1/12 + 1/12 + 1/12 + 1/12 + 1/12 = 1/2$$

MACHT VON **ROT**

	Anzahl von Koalitionspartnern			
	0	1	2	3
ROT	~~∅~~	**S** ~~M~~ ~~G~~	~~**S**, M~~ ~~**S**, G~~ M, G	~~**S**, M, G~~
	1/4	1/12	1/12	1/4
	Warscheinlichkeit von Koalitionen			

$$1/12 + 1/12 = 1/6$$

MACHT VON **MAGENTA**

	Anzahl von Koalitionspartnern			
	0	1	2	3
MAGENTA	$\emptyset$	**S** ~~R~~ ~~G~~	~~**S**, R~~ ~~**S**, G~~ R, G	~~**S**, R, G~~
	$1/4$	$1/12$	$1/12$	$1/4$
	Warscheinlichkeit von Koalitionen			

$$1/12 + 1/12 = 1/6$$

MACHT VON GRÜN

	Anzahl von Koalitionspartnern			
	0	1	2	3
GRÜN	$\emptyset$	S	~~S, R~~	
		~~R~~	~~S, M~~	~~S, R, M~~
		~~M~~	R, M	
	1/4	1/12	1/12	1/4
	Warscheinlichkeit von Koalitionen			

$$1/12 + 1/12 = 1/6$$

MACHT IM WICHTEL-PARLAMENT

Parteien	Stimmen	Prozente	Macht
SCHWARZ	310	49 %	1/2
ROT	193	31 %	1/6
MAGENTA	64	10 %	1/6
GRÜN	63	10 %	1/6

KONSEQUENZEN:

- Wichtelmännchen sind politisch zweigeteilt in **SCHWARZ** einerseits und **ROT**, **MAGENTA**, **GRÜN** andererseits
- **ROT**, **MAGENTA** und **GRÜN** haben die gleiche Macht

SHAPLEY-SHUBIK-INDEX

Parteien $1, \dots, n$, Koalitionen $S \subset \{1, \dots, n\}$

$$m_i \stackrel{def}{=} \sum_{\substack{S \text{ verliert} \\ S \cup \{i\} \text{ gewinnt}}} \underbrace{p_S(i)}_{\textit{Wahrscheinlichkeit}}$$

$$p_S(i) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\binom{n-1}{|S|}}$$

$\nearrow$ wähle Kardinalität s aus $\{0, 1, \dots, n-1\}$

$\nwarrow$ wähle Koalition S mit Kardinalität $|S| = s$

SHAPLEY-SHUBIK-INDEX

Parteien $1, \ldots, n$, Koalitionen $S \subset \{1, \ldots, n\}$

$$m_i = \sum_{\substack{S \text{ verliert} \\ S \cup \{i\} \text{ gewinnt}}} \underbrace{p_S(i)}_{\textit{Wahrscheinlichkeit}}$$

$$p_S(i) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\begin{pmatrix} n-1 \\ |S| \end{pmatrix}} = \frac{1}{n} \cdot \frac{|S|!(n-1-|S|)!}{(n-1)!} = \frac{|S|!(n-1-|S|)!}{n!}$$

$$\text{Fakultät} \quad : \quad k! \stackrel{def}{=} 1 \cdot 2 \cdots k$$

$$\text{Binomialkoeffizient} \quad : \quad \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix} \stackrel{def}{=} \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

DREIECK VON PASCAL

$$p_S(i) = \frac{1}{n} \cdot \frac{1}{\left(\begin{array}{c} n-1 \\ |S| \end{array} \right)}$$

$$\left(\begin{array}{c} n-1 \\ |S| \end{array} \right) \qquad \xrightarrow{|S|}$$

$$\downarrow n \qquad \begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & 1 & & 1 & & & \\ & & 1 & & 2 & & 1 & & \\ & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\ 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \end{array}$$

hohe Wahrscheinlichkeit für kleine und große Koalitionen

Suche nach wenigen	$\leftarrow$	eigener Wille	:	Max Weber
Anschluß an viele	$\leftarrow$	Einvernehmen	:	Hannah Arendt

ZERSPLITTERUNG I

Parteien	Stimmen
GROSS	$m-1$
klein$_1$	1
...	...
klein$_m$	1

$$\downarrow$$

Insgesamt: $2m-1$ Stimmen
Entscheidung: mehr als $m-1$ Stimmen

ZERSPLITTERUNG I

Parteien	Stimmen	Macht
GROSS	$m-1$	$\frac{m-1}{m+1}$
klein$_1$	1	$\frac{2}{m(m+1)}$
...	...	...
klein$_m$	1	$\frac{2}{m(m+1)}$

$$\downarrow$$

Insgesamt: $2m-1$ Stimmen
Entscheidung: mehr als m Stimmen

ZERSPLITTERUNG I

Parteien	Stimmen	Macht
GROSS	$m-1$	$\frac{m-1}{m+1}$
klein$_1$	1	$\frac{2}{m(m+1)}$
...	...	...
klein$_m$	1	$\frac{2}{m(m+1)}$

TENDENZ für $m \to \infty$:

- Macht von **GROSS** $= \frac{m-1}{m+1} \longrightarrow 1$
- Macht von $\{\textbf{klein}_1, \ldots, \textbf{klein}_m\} = \sum \frac{2}{m(m+1)} = \frac{2}{m+1} \longrightarrow 0$

ZERSPLITTERUNG I

Parteien	Stimmen	Macht
GROSS	$m-1$	$\frac{m-1}{m+1}$
$\mathbf{klein}_1$	1	$\frac{2}{m(m+1)}$
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
$\mathbf{klein}_m$	1	$\frac{2}{m(m+1)}$

TENDENZ für $m \to \infty$:

- Macht von **GROSS** $= \frac{m-1}{m+1} \longrightarrow 1$
- Macht von $\{\mathbf{klein}_1, \ldots, \mathbf{klein}_m\} = \sum \frac{2}{m(m+1)} = \frac{2}{m+1} \longrightarrow 0$

$\boxed{\text{DIKTATUR EINER GROSSEN PARTEI}}$

ZERSPLITTERUNG II

Parteien	Stimmenanteile
$\mathbf{GROSS}_1$	$\frac{1}{3}$
$\mathbf{GROSS}_2$	$\frac{1}{3}$
$\mathbf{klein}_1$	$\frac{1}{3(n-2)}$
...	...
$\mathbf{klein}_{n-2}$	$\frac{1}{3(n-2)}$

$$\downarrow$$

Insgesamt: 1 Stimmenanteil
Entscheidung: mehr als $\frac{1}{2}$ der Stimmen

ZERSPLITTERUNG II

Parteien	Stimmenanteile	Macht
GROSS$_1$	$\frac{1}{3}$	$\frac{n}{4(n-1)}$
GROSS$_2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{n}{4(n-1)}$
klein$_1$	$\frac{1}{3(n-2)}$	$\frac{1}{2(n-1)}$
...	...	
klein$_{n-2}$	$\frac{1}{3(n-2)}$	$\frac{1}{2(n-1)}$

$$\downarrow$$

Insgesamt: 1 Stimmenanteil
Entscheidung: mehr als $\frac{1}{2}$ der Stimmen

ZERSPLITTERUNG II

Parteien	Stimmenanteile	Macht
GROSS$_1$	$\frac{1}{3}$	$\frac{n}{4(n-1)}$
GROSS$_2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{n}{4(n-1)}$
klein$_1$	$\frac{1}{3(n-2)}$	$\frac{1}{2(n-1)}$
...	...	
klein$_{n-2}$	$\frac{1}{3(n-2)}$	$\frac{1}{2(n-1)}$

TENDENZ für $n \to \infty$:

- Macht von **GROSS**$_1$ oder **GROSS**$_2$ $= \frac{n}{4(n-1)} \longrightarrow \frac{1}{4}$
- Macht von $\{\textbf{klein}_1, \ldots, \textbf{klein}_{n-2}\} = \sum \frac{1}{2(n-1)} = \frac{n-2}{2(n-1)} \longrightarrow \frac{1}{2}$

ZERSPLITTERUNG II

Parteien	Stimmenanteile	Macht
$\mathbf{GROSS}_1$	$\frac{1}{3}$	$\frac{n}{4(n-1)}$
$\mathbf{GROSS}_2$	$\frac{1}{3}$	$\frac{n}{4(n-1)}$
$\mathbf{klein}_1$	$\frac{1}{3(n-2)}$	$\frac{1}{2(n-1)}$
...	...	
$\mathbf{klein}_{n-2}$	$\frac{1}{3(n-2)}$	$\frac{1}{2(n-1)}$

TENDENZ für $n \to \infty$:

- Macht von $\mathbf{GROSS}_1$ oder $\mathbf{GROSS}_2 = \frac{n}{4(n-1)} \longrightarrow \frac{1}{4}$
- Macht von $\{\mathbf{klein}_1, \ldots, \mathbf{klein}_{n-2}\} = \sum \frac{1}{2(n-1)} = \frac{n-2}{2(n-1)} \longrightarrow \frac{1}{2}$

$\boxed{\text{DIKTATUR VIELER KLEINER PARTEIEN}}$