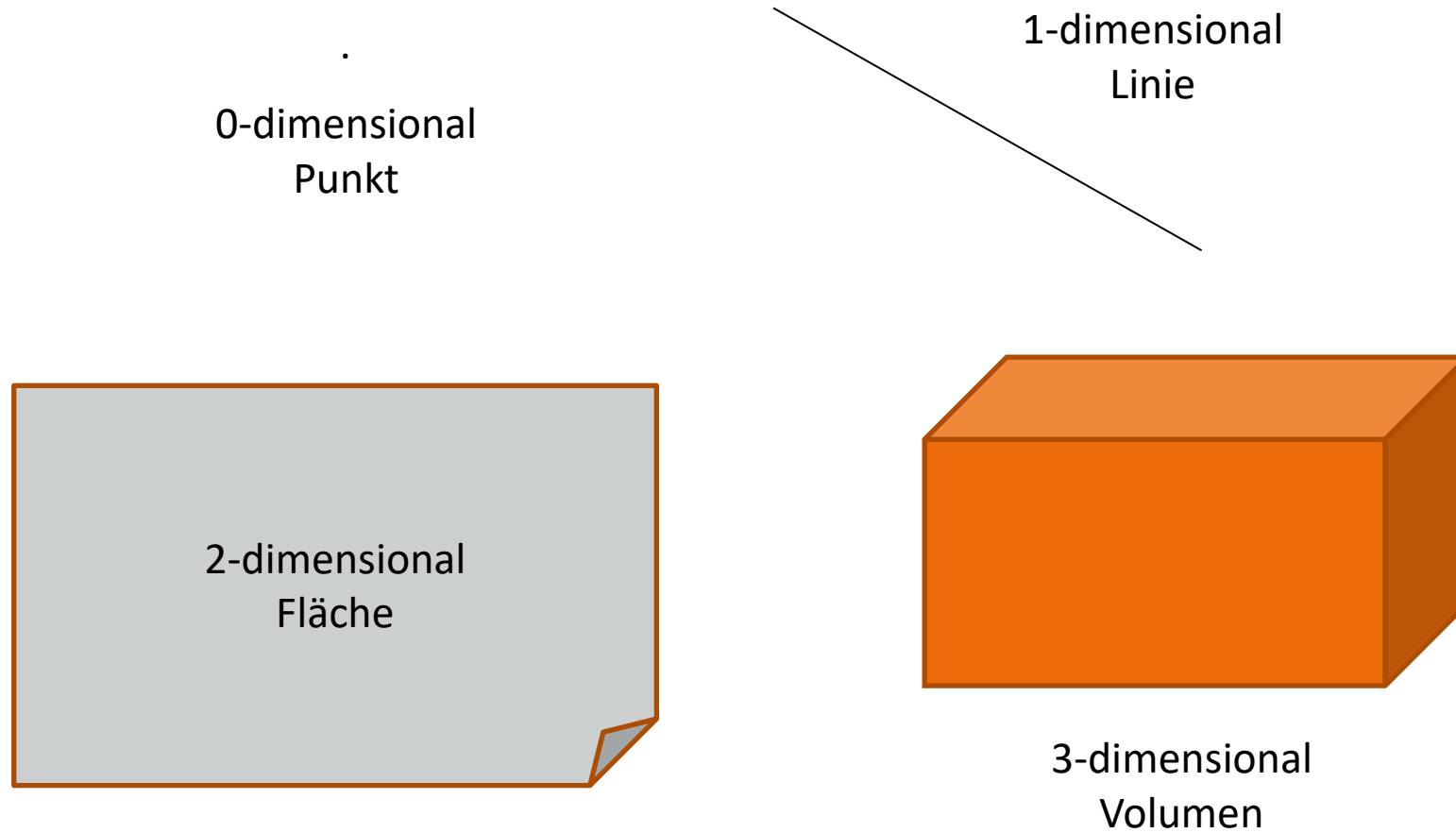


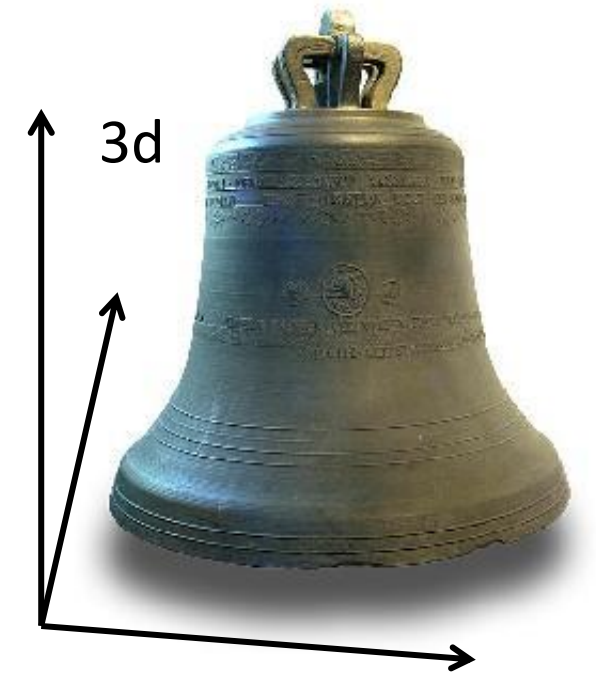
Dimension und Klang



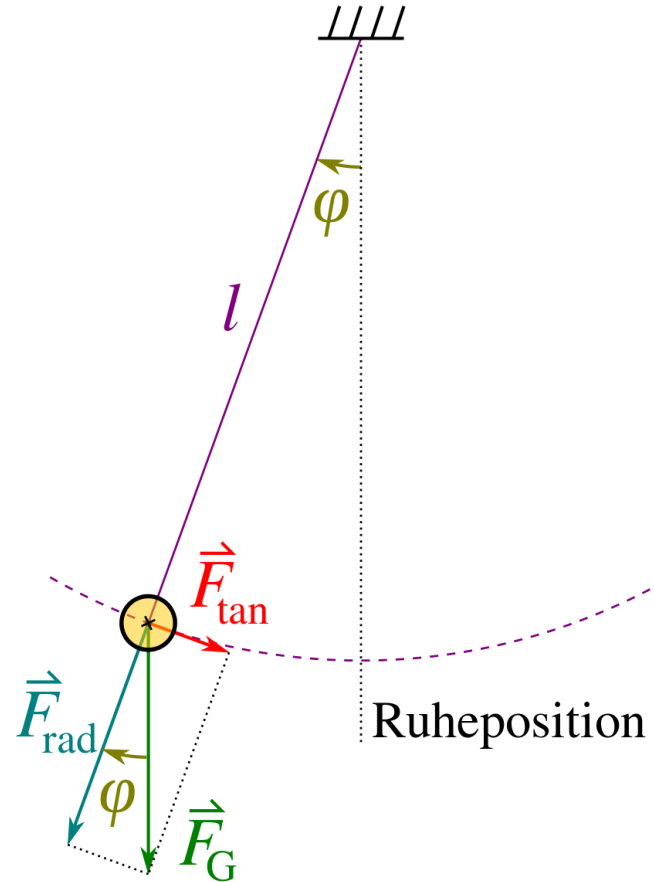
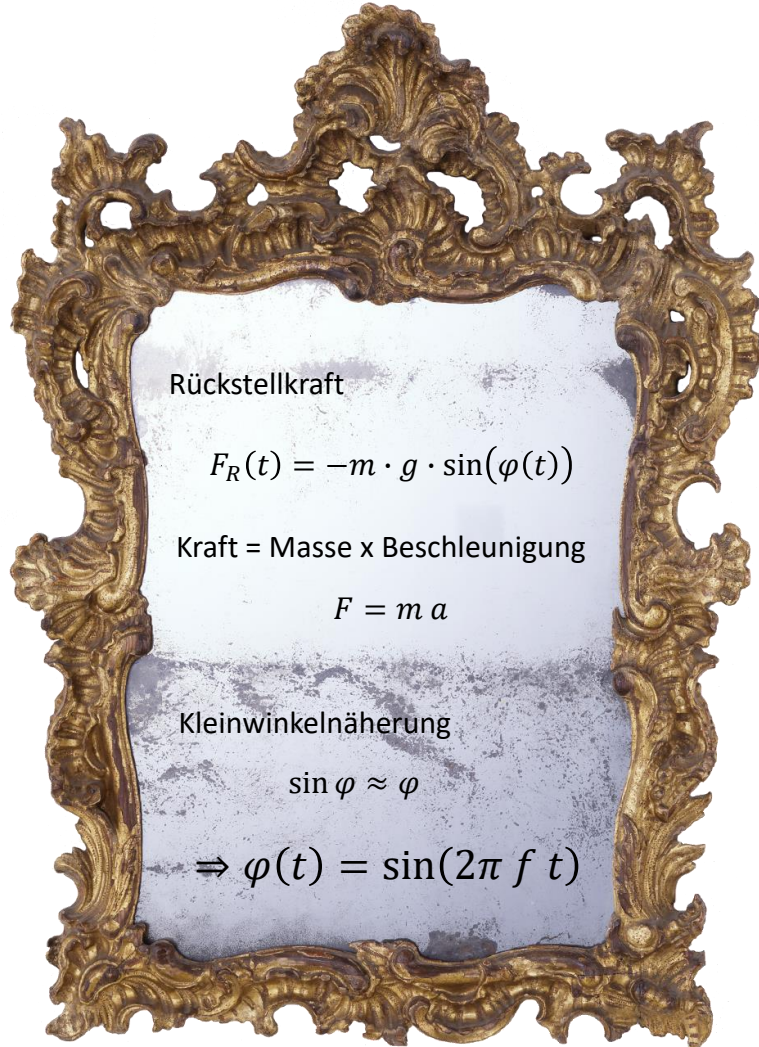
Null-, ein-, zwei- und dreidimensionale Körper



Dimension



Der harmonische Oszillator: Schwingung mit Frequenz f

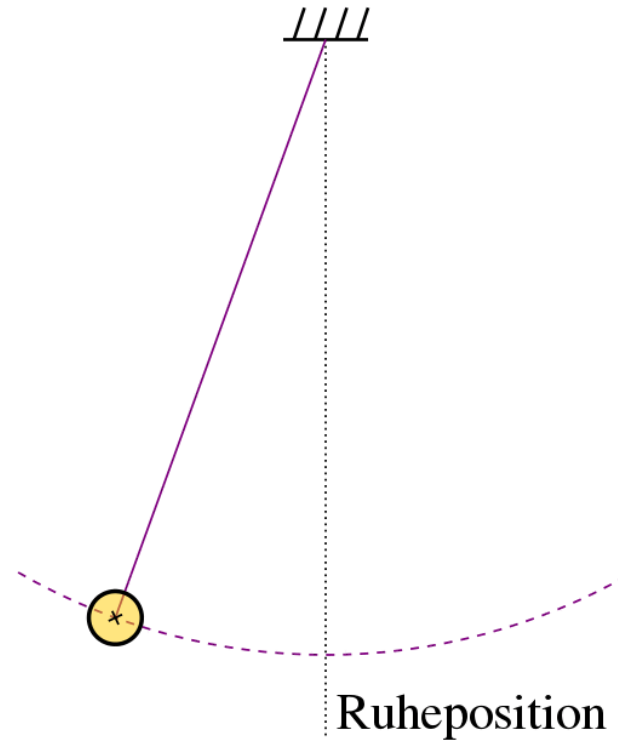
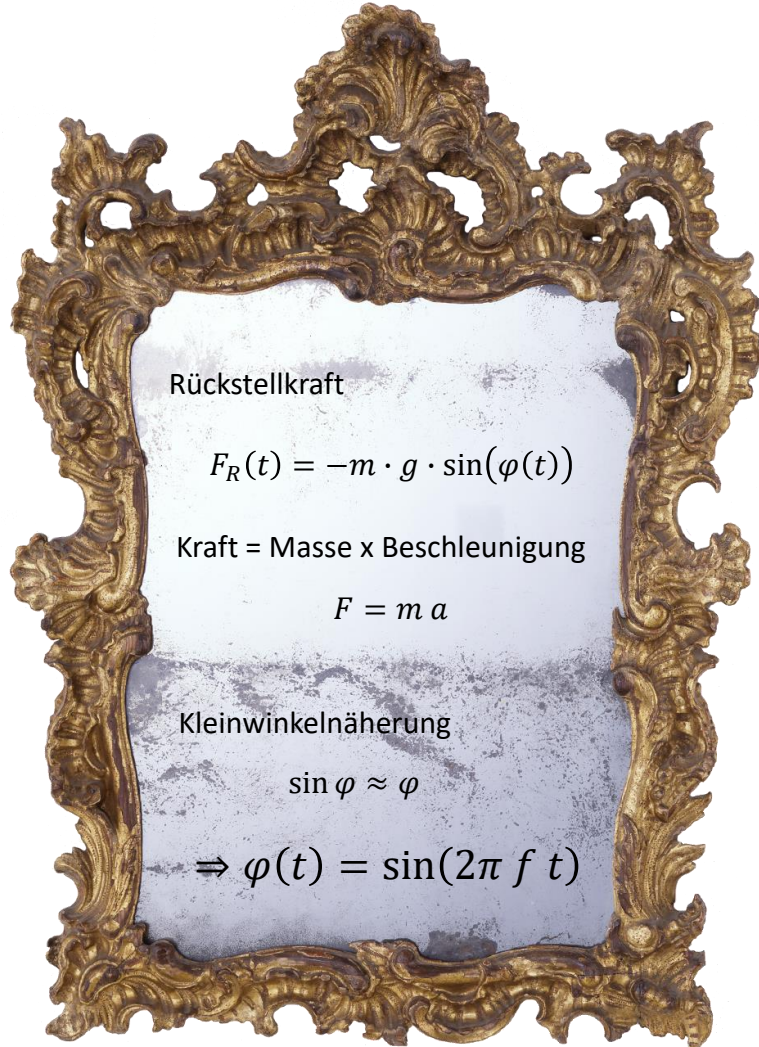


Pendel

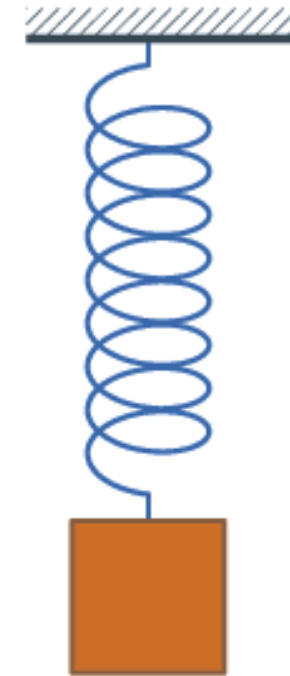
Dimension: 0 + 1

↑ ↑
 räumlich zeitlich

Der harmonische Oszillator: Schwingung mit Frequenz f



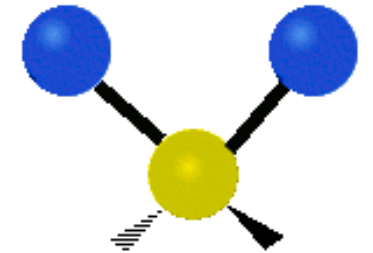
Fadenpendel



Federpendel



Die Fruchtfliege des Physikers



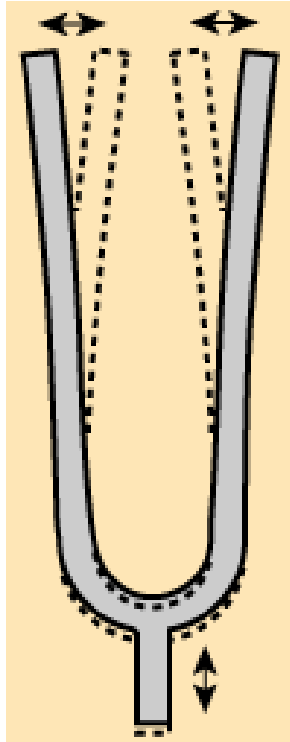
Molekülschwingung

Quelle: Wikipedia

Dimension



Die Stimmgabel



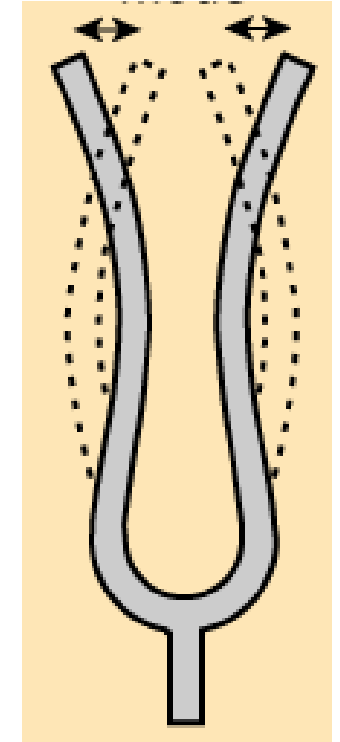
440 Hz

Biegeschwinger

Rückstellkraft \sim Auslenkung

→ harmonischer Oszillator

$$y(t) = \sin(2\pi f t)$$

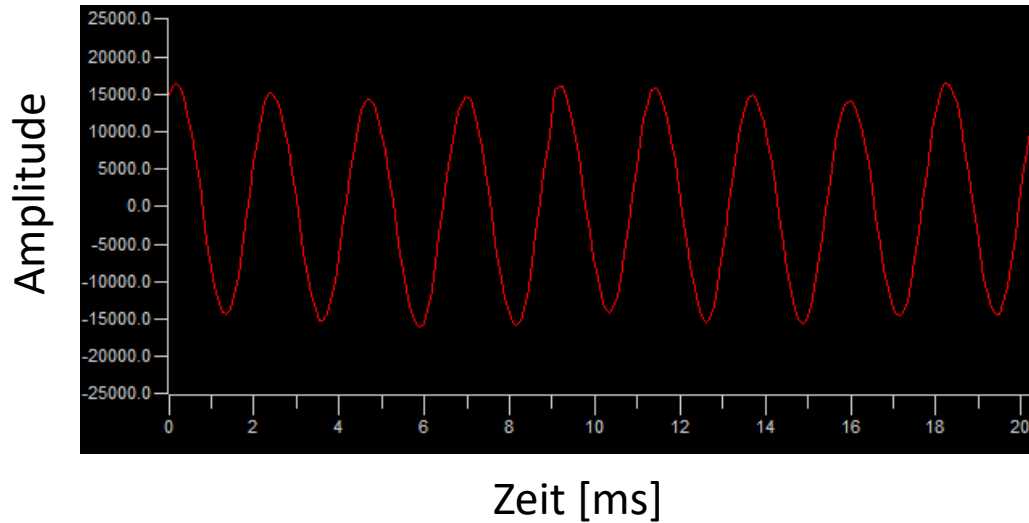


2774 Hz („clang“)

Quelle: hyperphysics.phy-astr.gsu.edu/hbase/music/tunfor.html

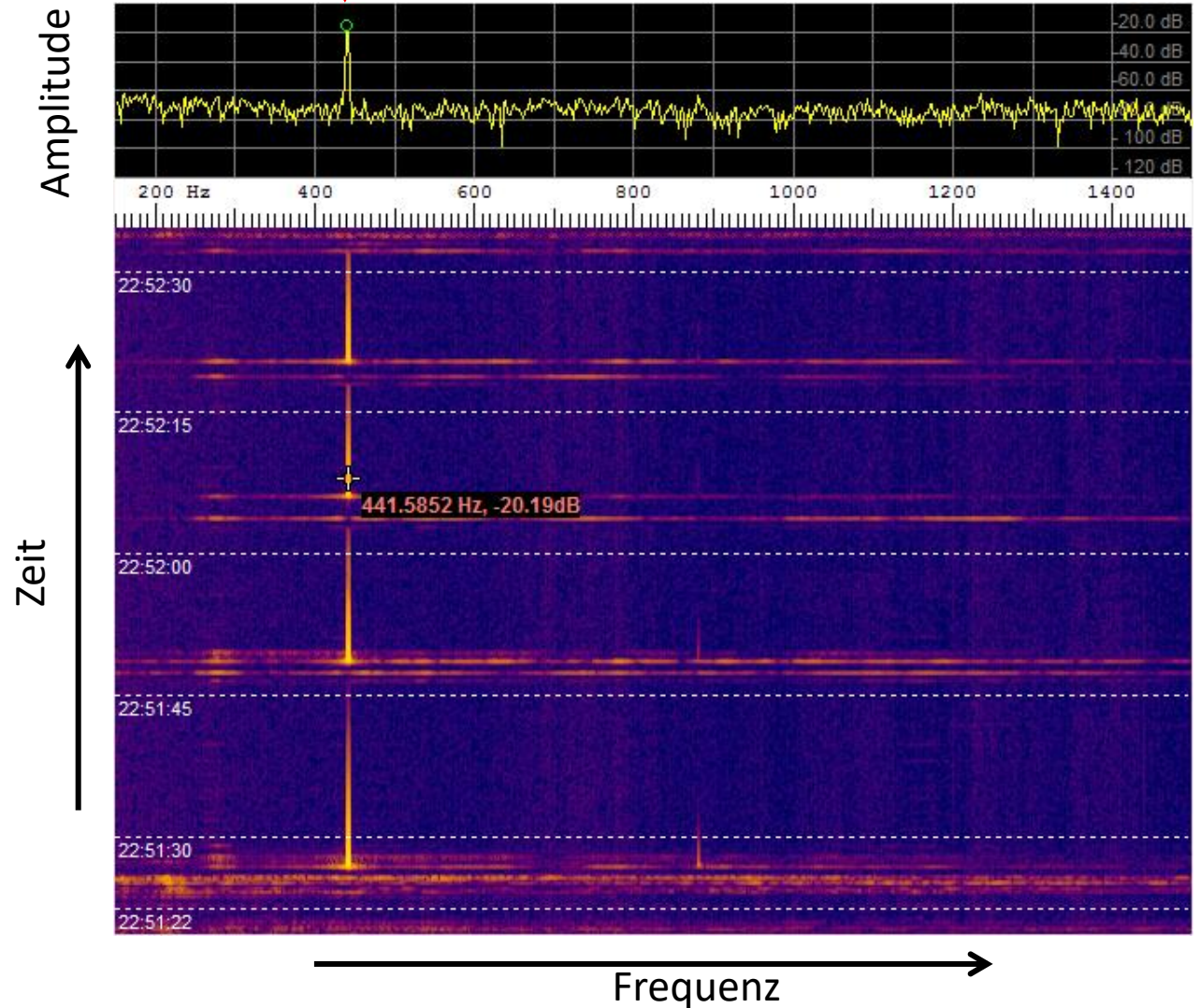
Die Stimmgabel im Experiment

Sinus-Schwingung



Schwingung
bei 440 Hz

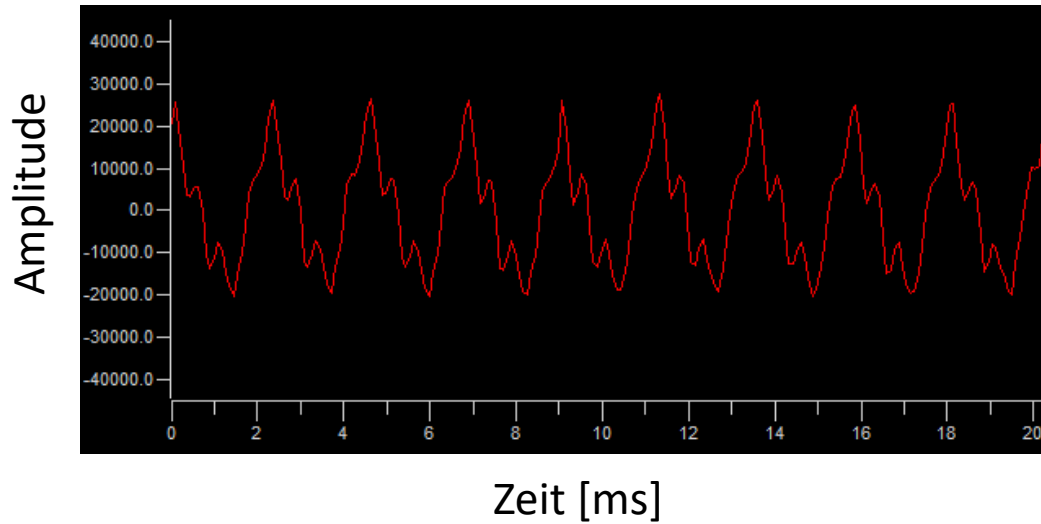
Spektrum



Programm: SpectrumLab

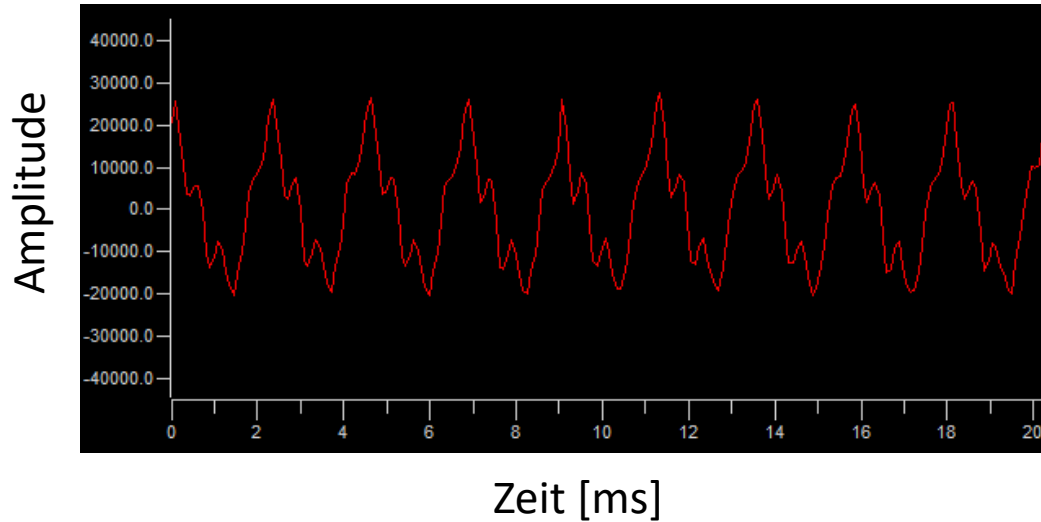
1D – Schwingungsmoden einer Saite

Periodische Schwingung



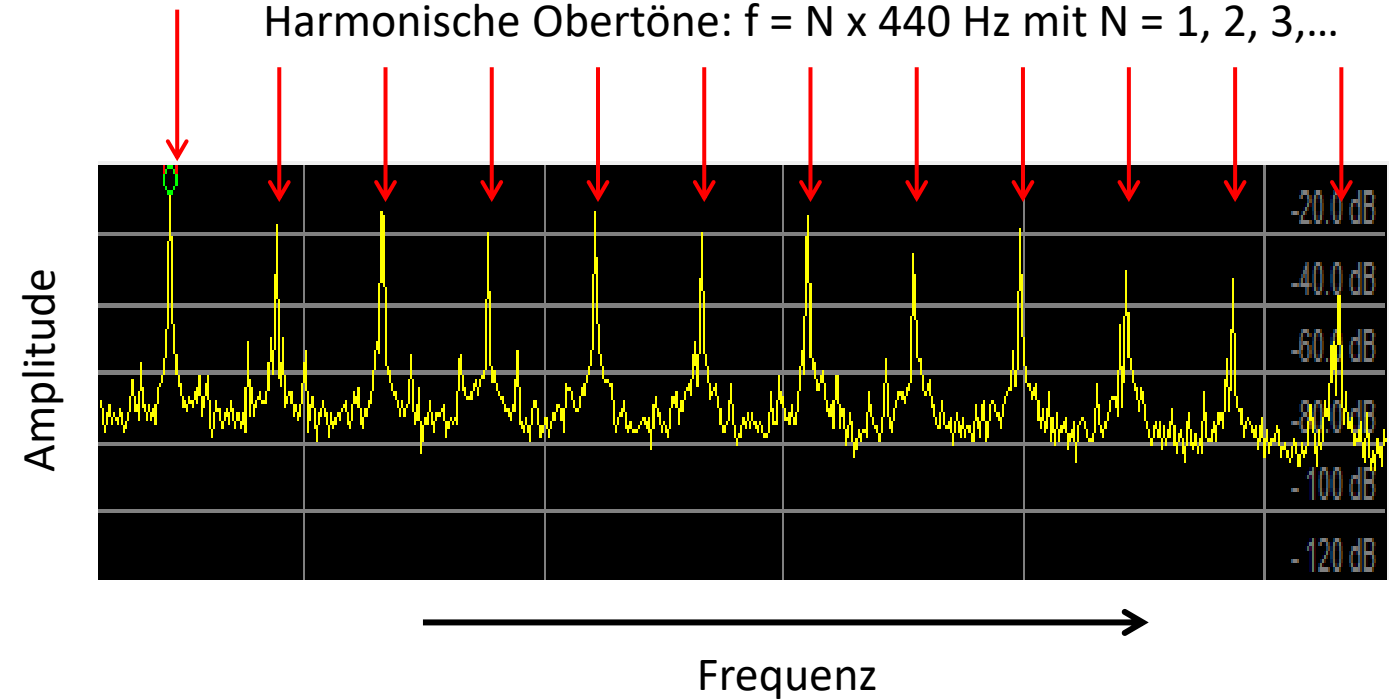
1D – Schwingungsmoden einer Saite

Periodische Schwingung



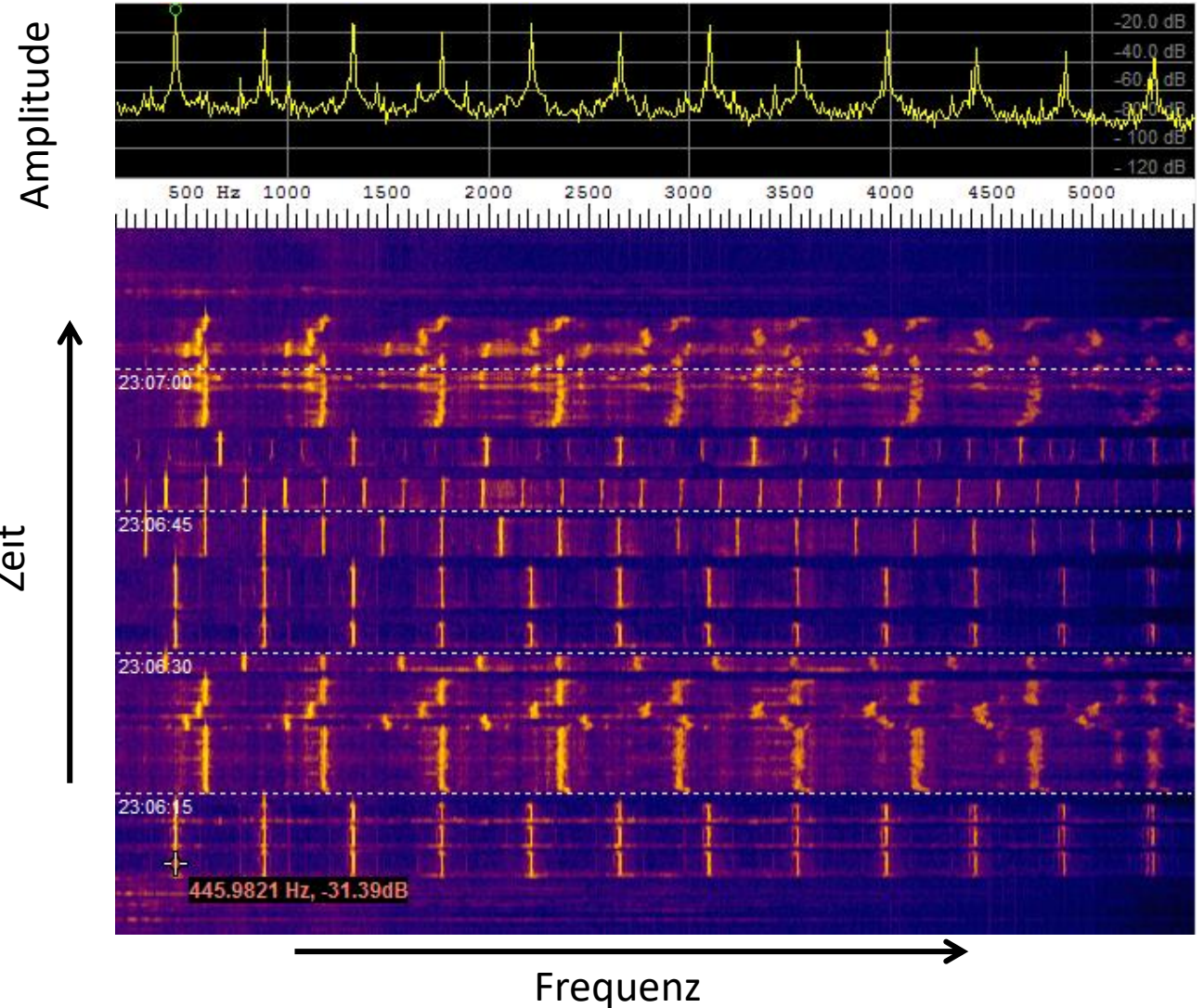
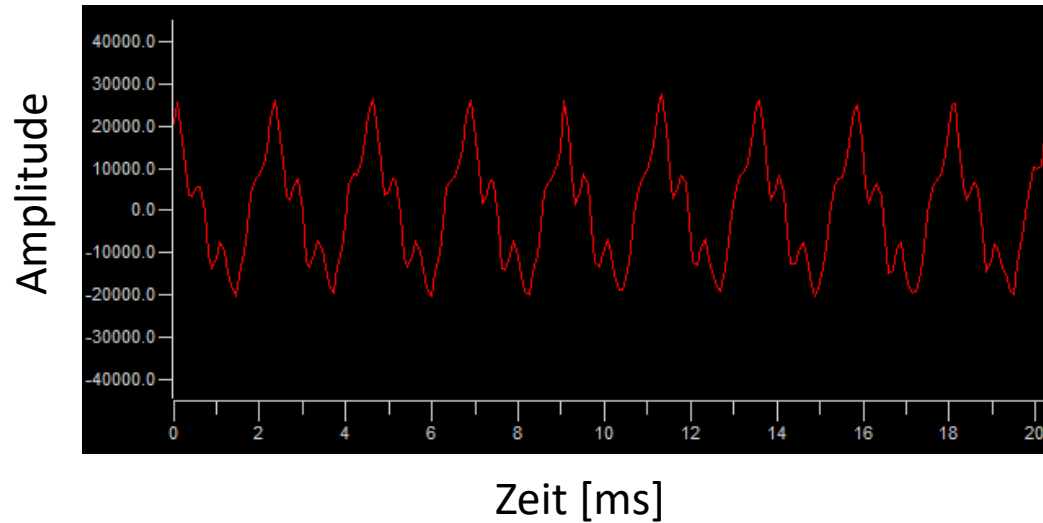
A-Saite
f=440 Hz

Harmonische Obertöne: $f = N \times 440 \text{ Hz}$ mit $N = 1, 2, 3, \dots$



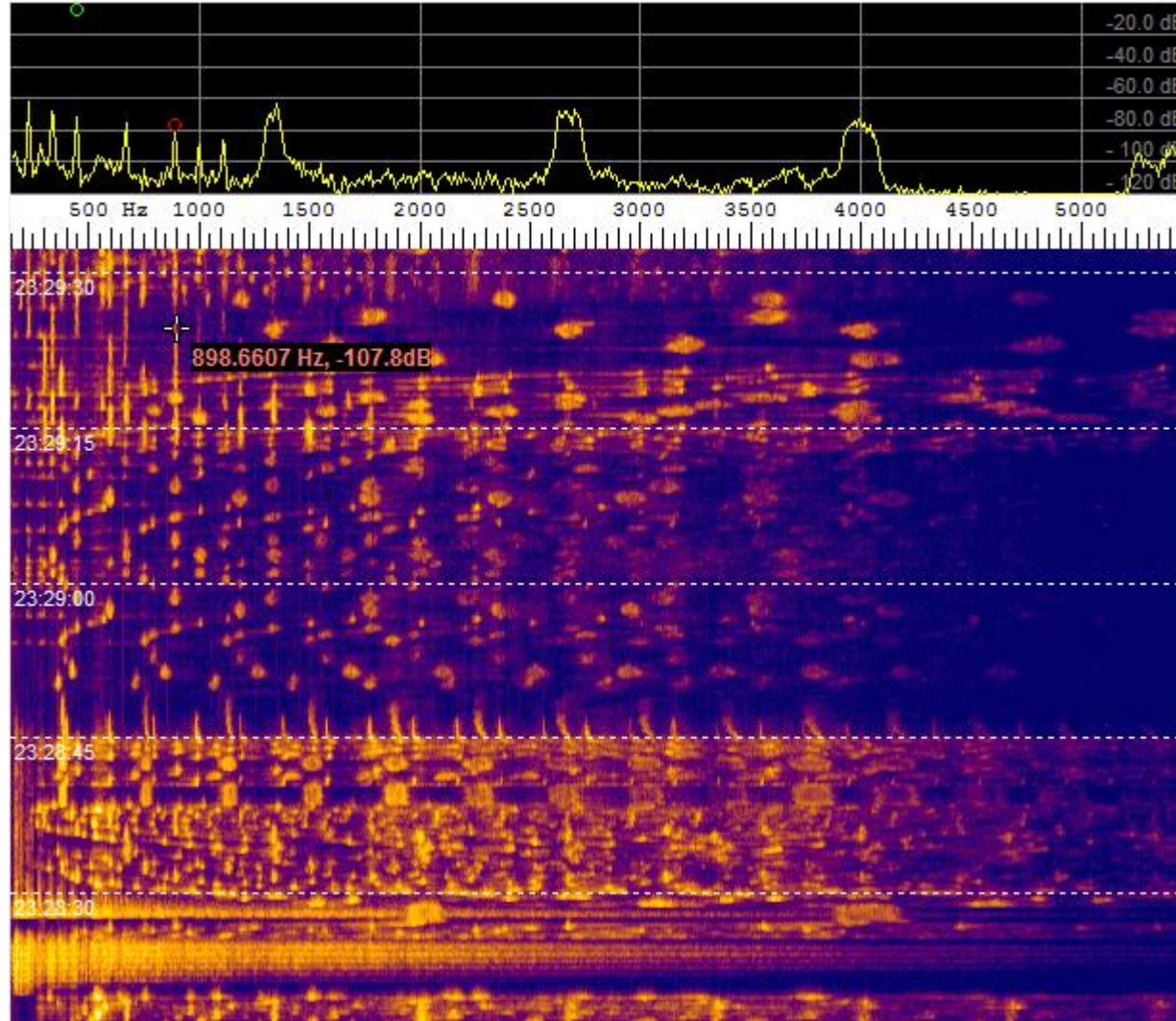
1D – Schwingungsmoden einer Saite

Periodische Schwingung



Harmonische Reihen – Obertonspektrum – Klang

Holzbläser



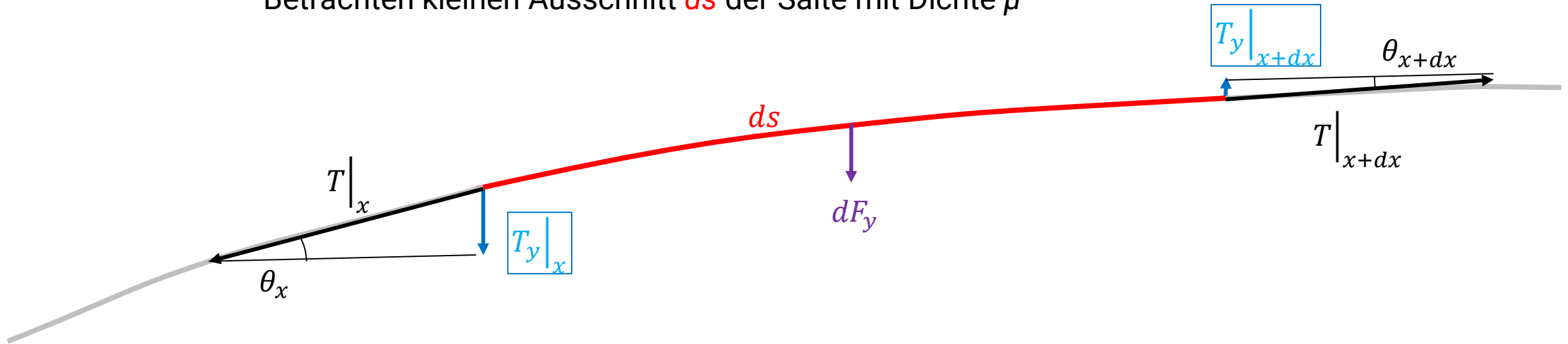
Violine

Pauke

Quelle: Beethoven, Violinkonzert

Wellen

Betrachten kleinen Ausschnitt ds der Saite mit Dichte μ



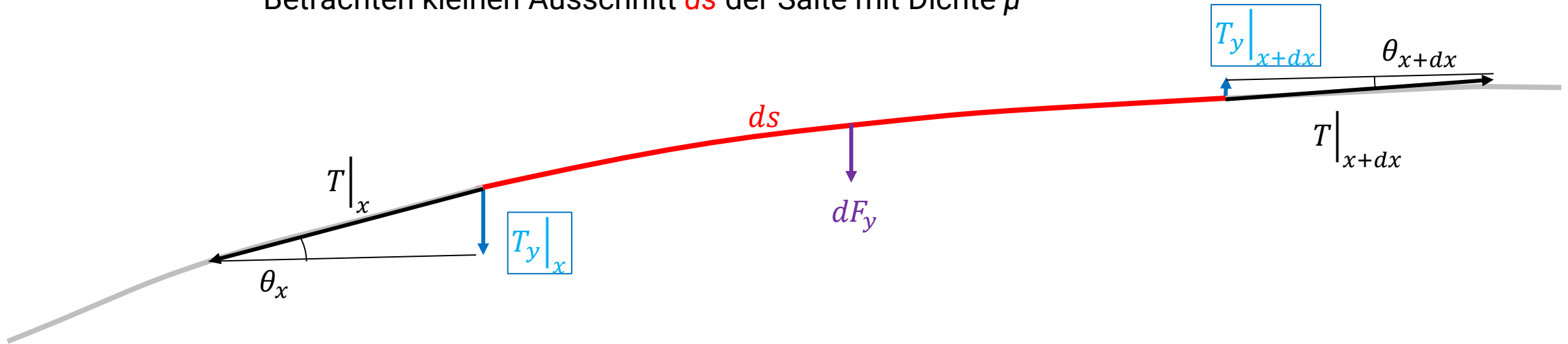
Konstante Saitenspannung: $T|_x = T|_{x+dx}$

Rückstellkraft: $dF_y = T_y|_{x+dx} - T_y|_x$

$$dF_y = T(\sin \theta_{x+dx} - \sin \theta_x)$$

Wellen

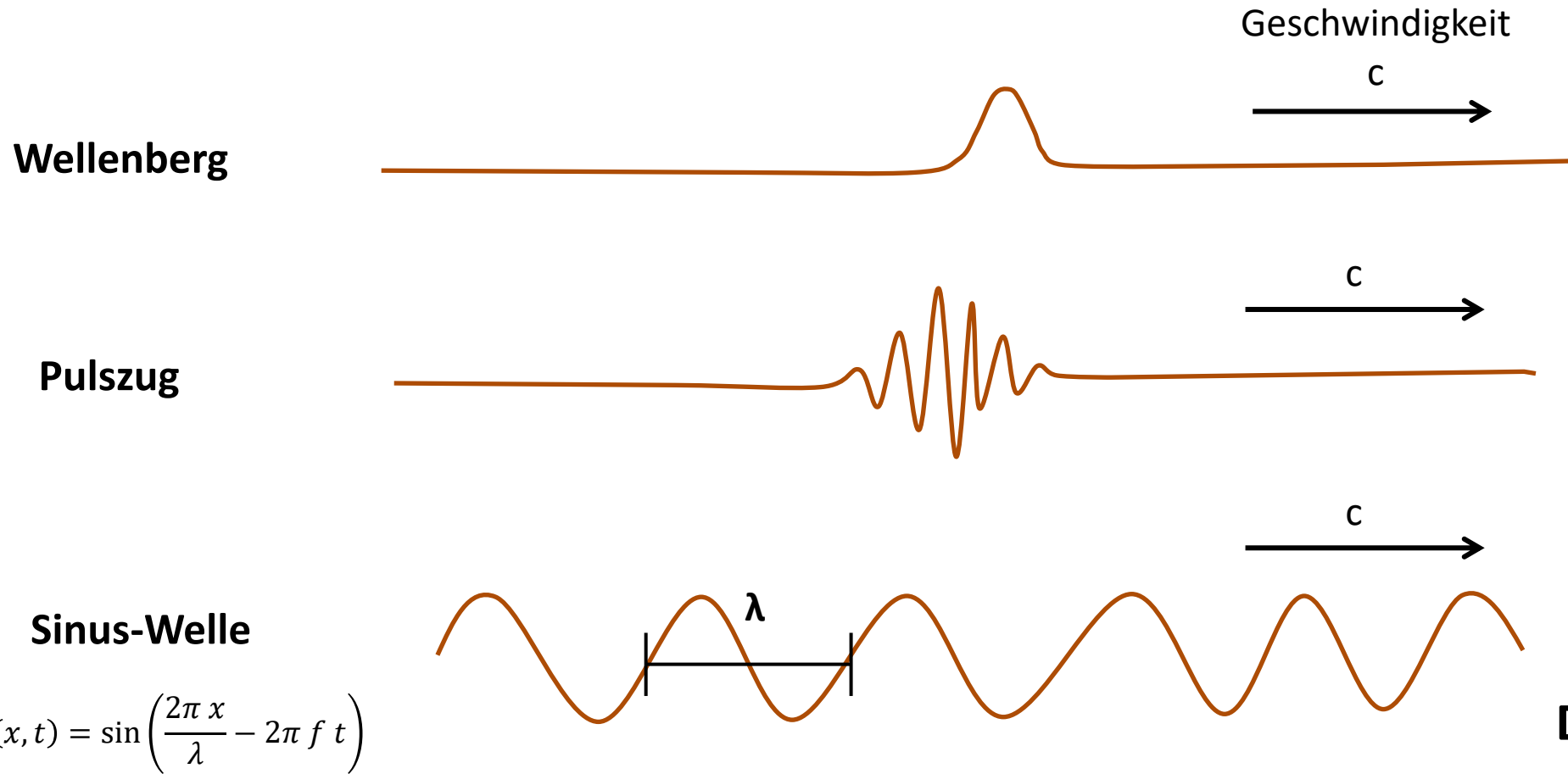
Betrachten kleinen Ausschnitt ds der Saite mit Dichte μ



→ mit $F = ma$ (Newton) und $c^2 = T/\mu$ (Ausbreitungsgeschwindigkeit) folgt die transversale Wellengleichung:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$$

Wellen: Frequenz f und Wellenlänge λ



$$y(x, t) = \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} - 2\pi f t\right)$$

Dimension: 1 + 1

↗
 räumlich

↗
 zeitlich

Kreiswelle und Kugelwelle

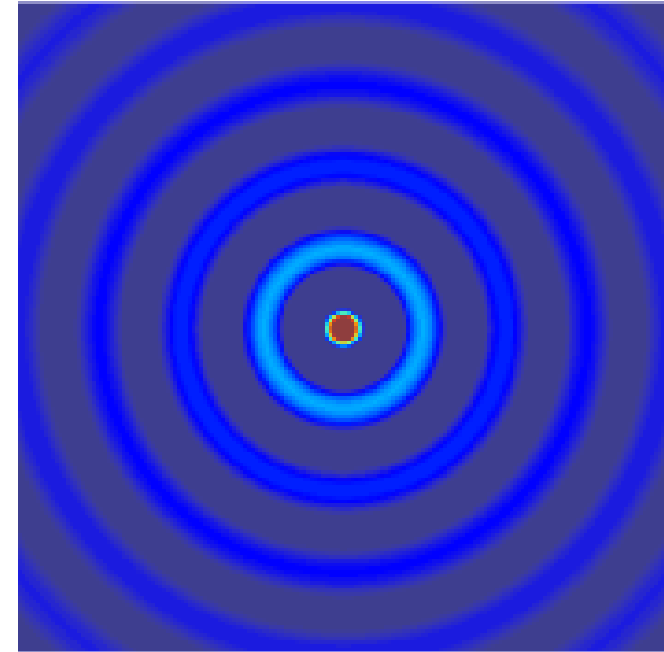
Wasserwelle



$$z(x, y, t)$$

Dimensionen: x, y, t („2+1“)

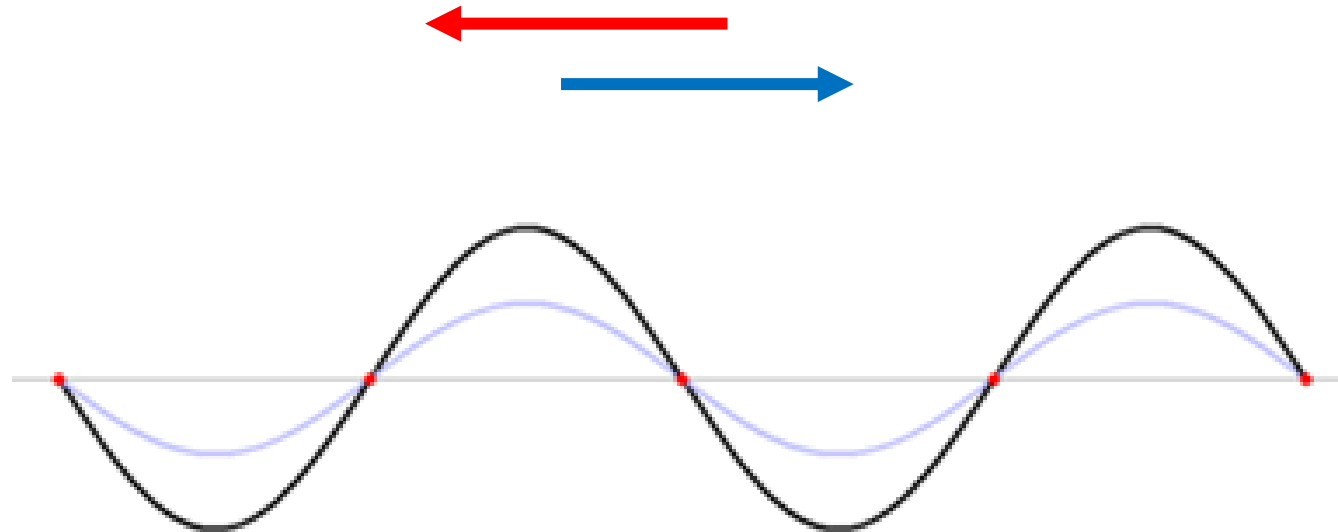
Schallwelle



$$p(x, y, z, t)$$

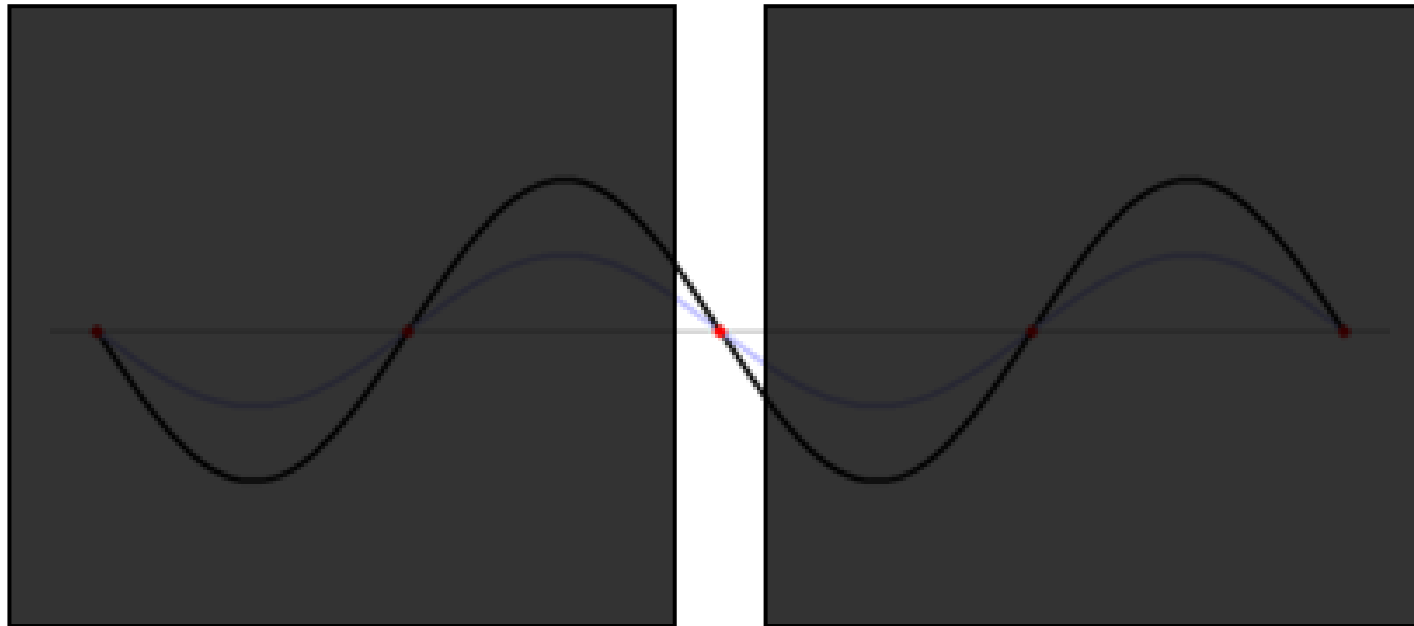
Dimensionen: x, y, z, t („3+1“)

Stehende Welle: linkslaufende + rechtslaufende Welle



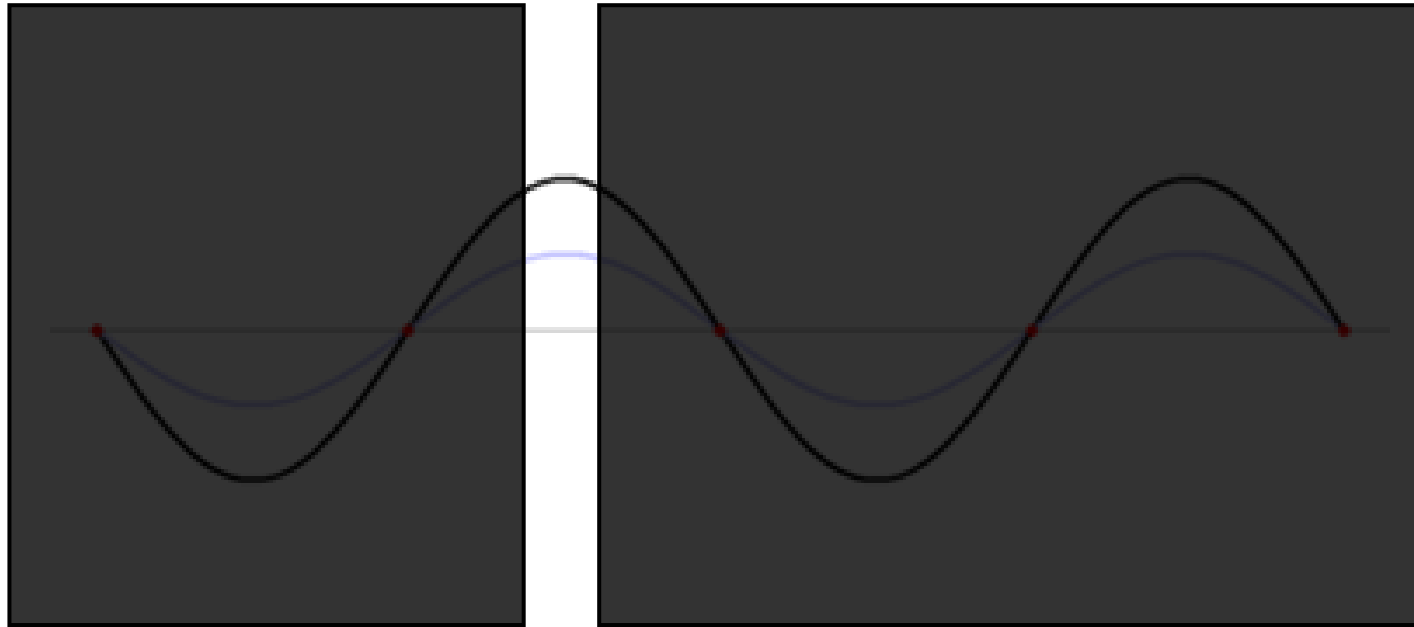
Quelle: Wikipedia

Stehende Welle: linkslaufende + rechtslaufende Welle



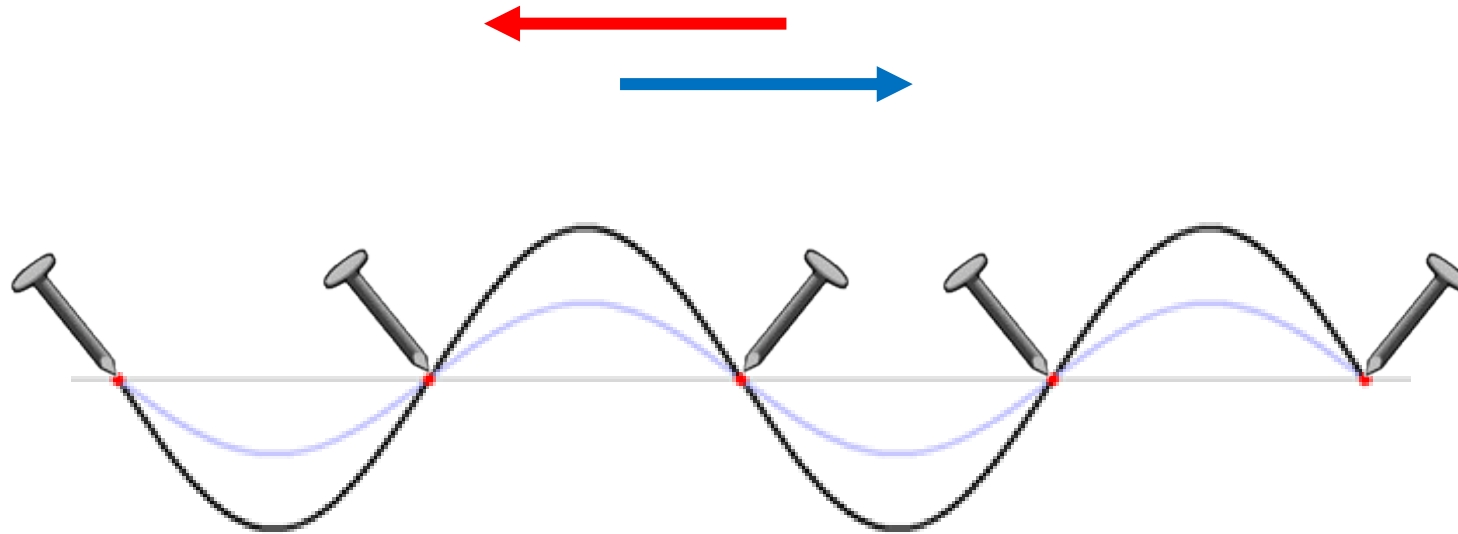
Quelle: Wikipedia

Stehende Welle: linkslaufende + rechtslaufende Welle



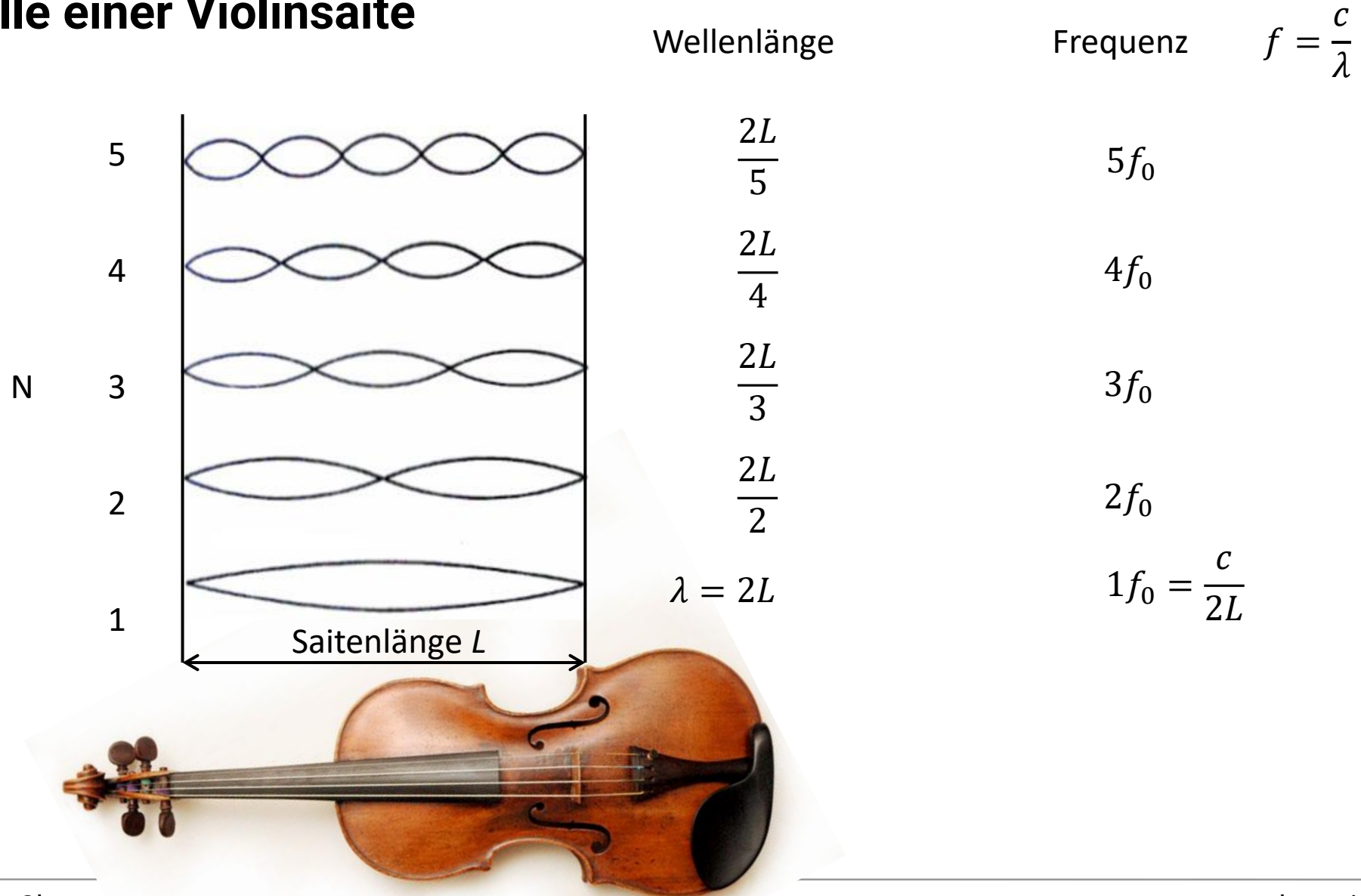
Quelle: Wikipedia

Stehende Welle: linkslaufende + rechtslaufende Welle

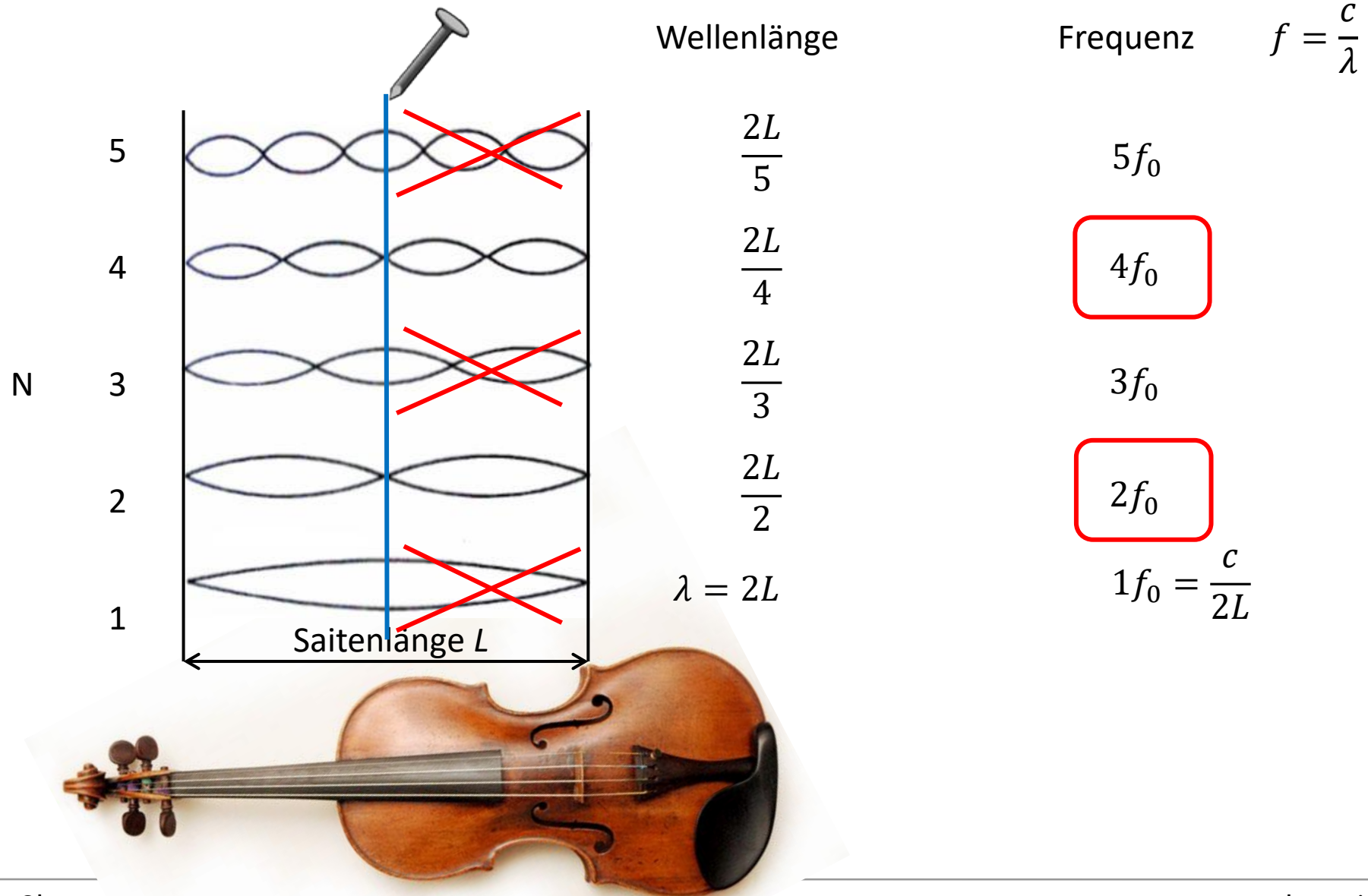


Quelle: Wikipedia

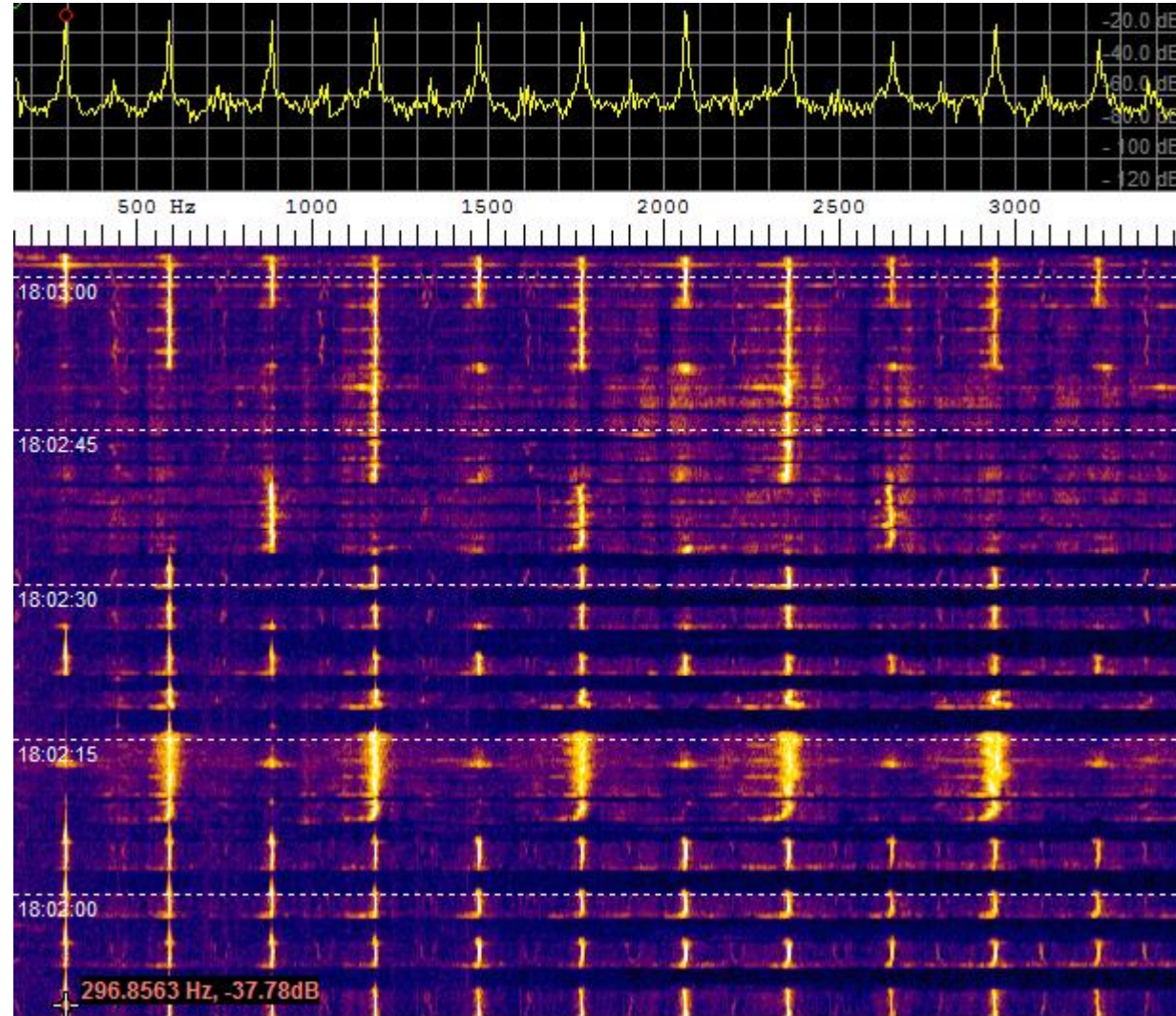
Stehende Welle einer Violine



Flageolett



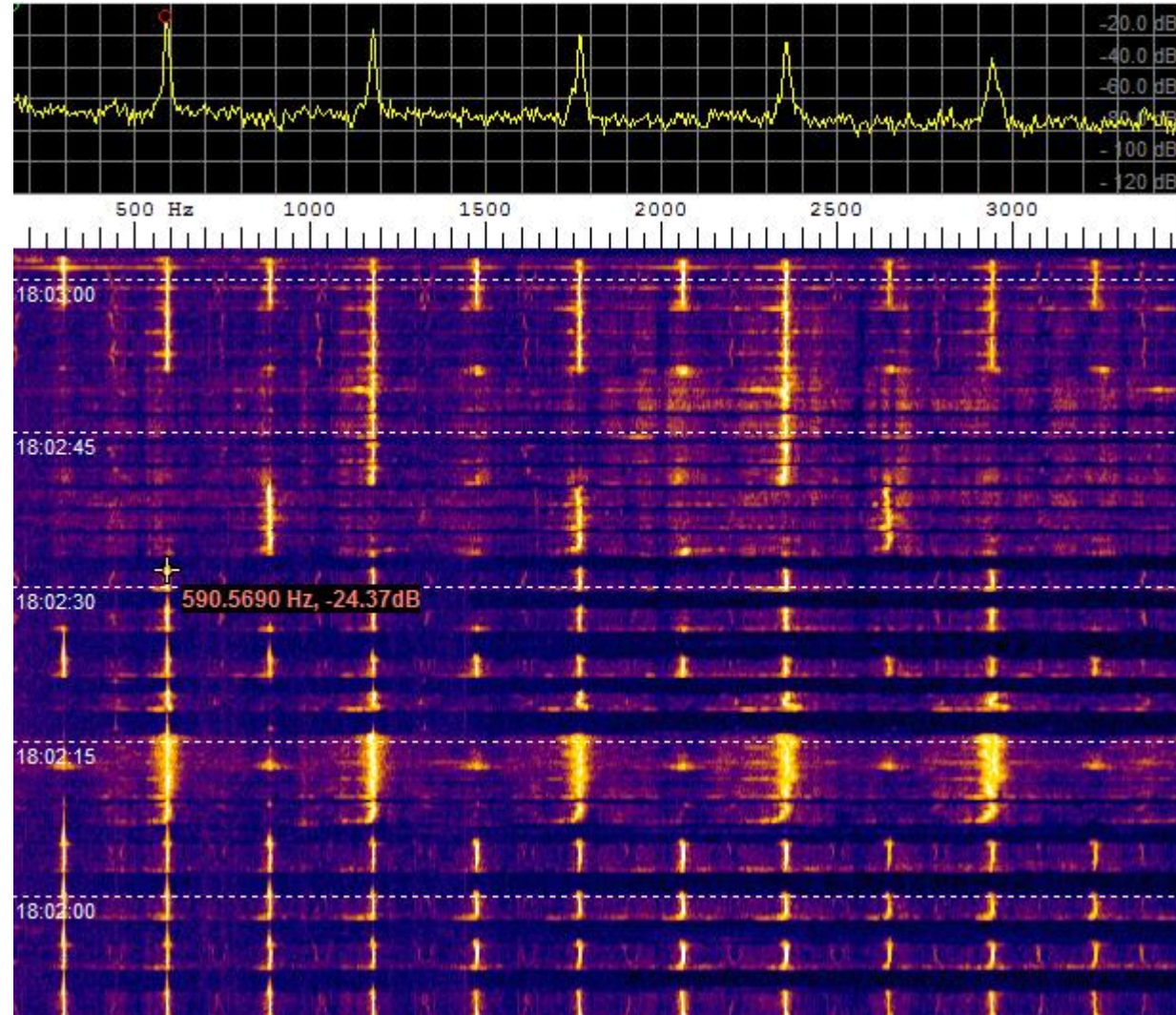
Obertöne (Moden) eine Saite



d Oktave, 600 Hz,
Vibrato

d-Saite, 300 Hz

Obertöne (Moden) eine Saite

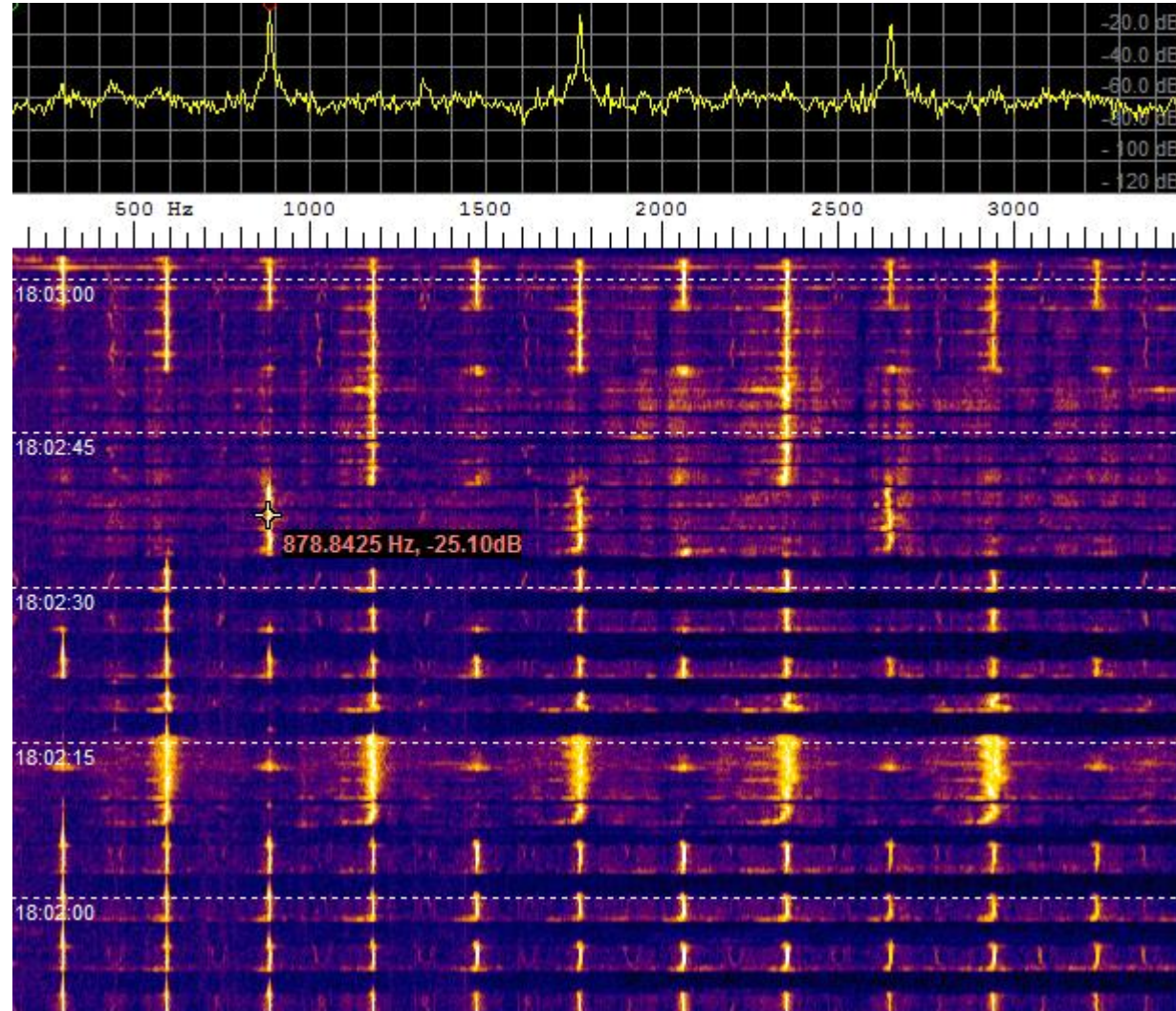


Oktav-Flageolett

d Oktave, 600 Hz,
Vibrato

d-Saite, 300 Hz

Obertöne (Moden) eine Saite



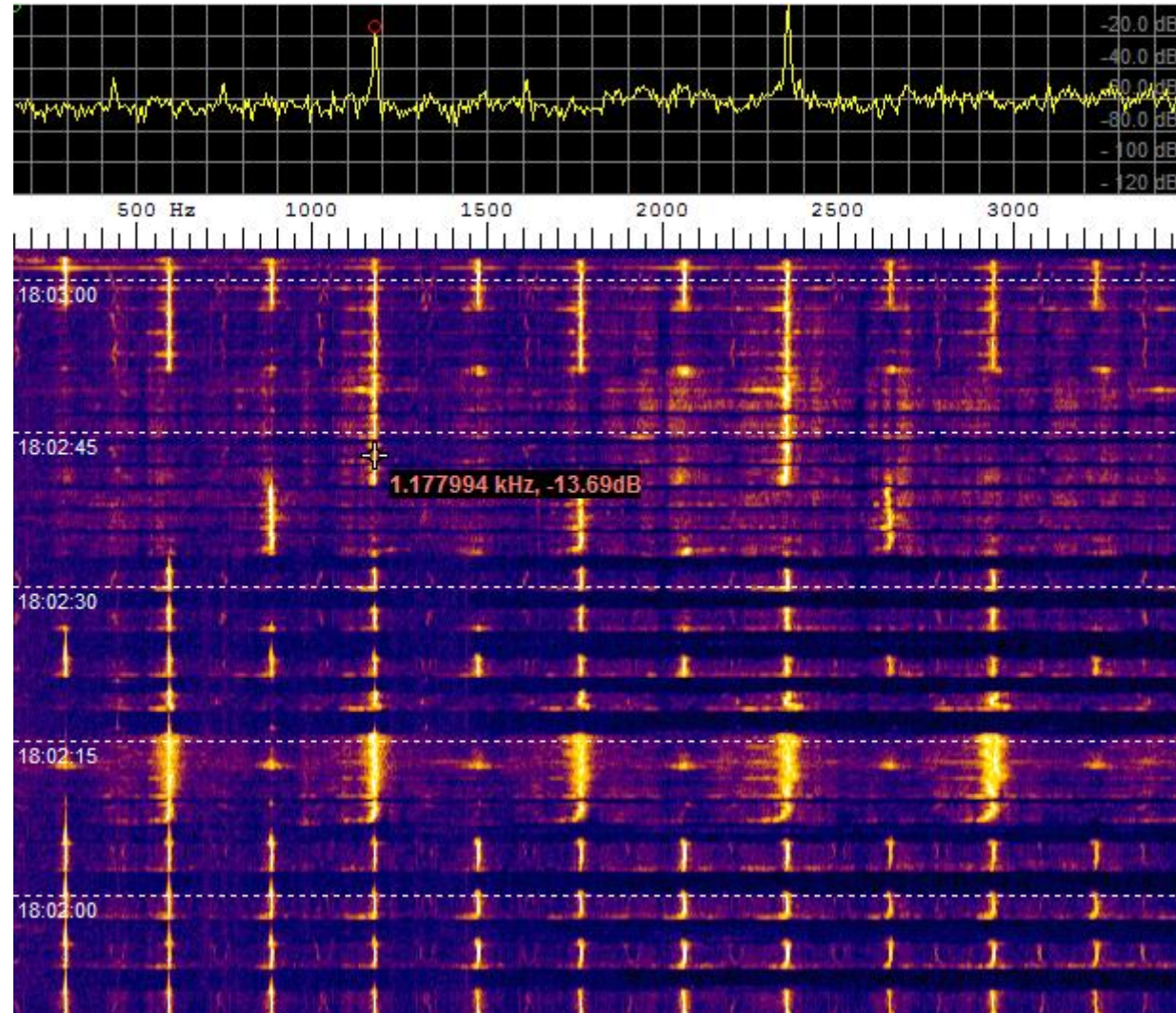
Quint-Flageolett

Oktav-Flageolett

d Oktave, 600 Hz,
Vibrato

d-Saite, 300 Hz

Obertöne (Moden) eine Saite



Quart-Flageolett

Quint-Flageolett

Oktav-Flageolett

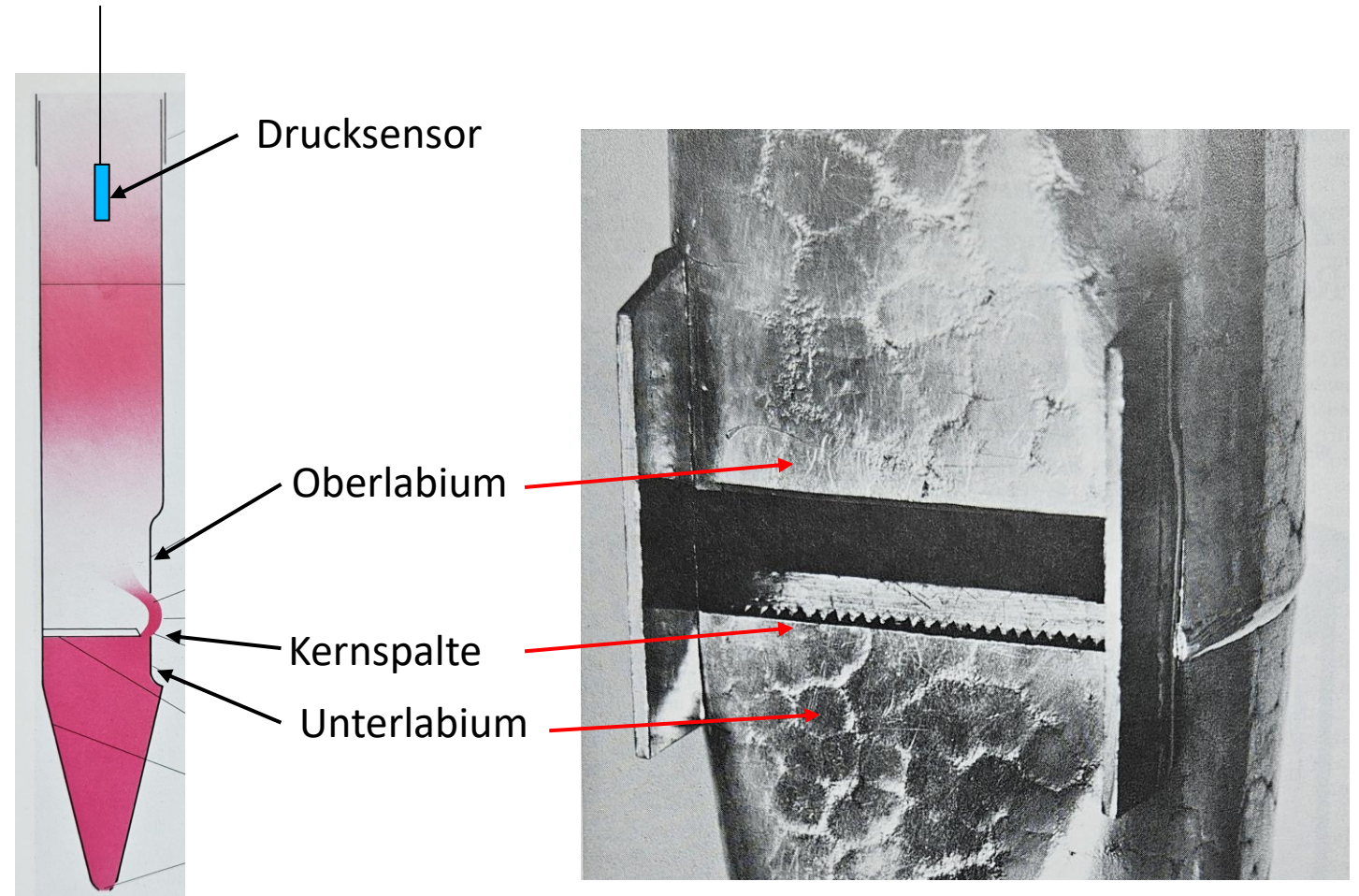
d Oktave, 600 Hz,
Vibrato

d-Saite, 300 Hz

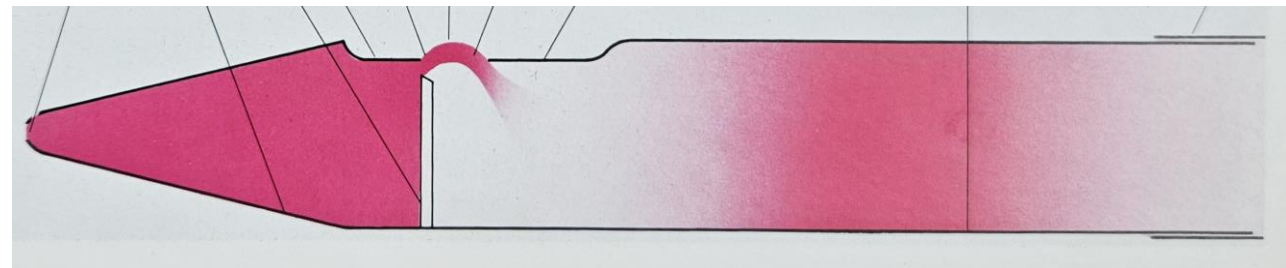
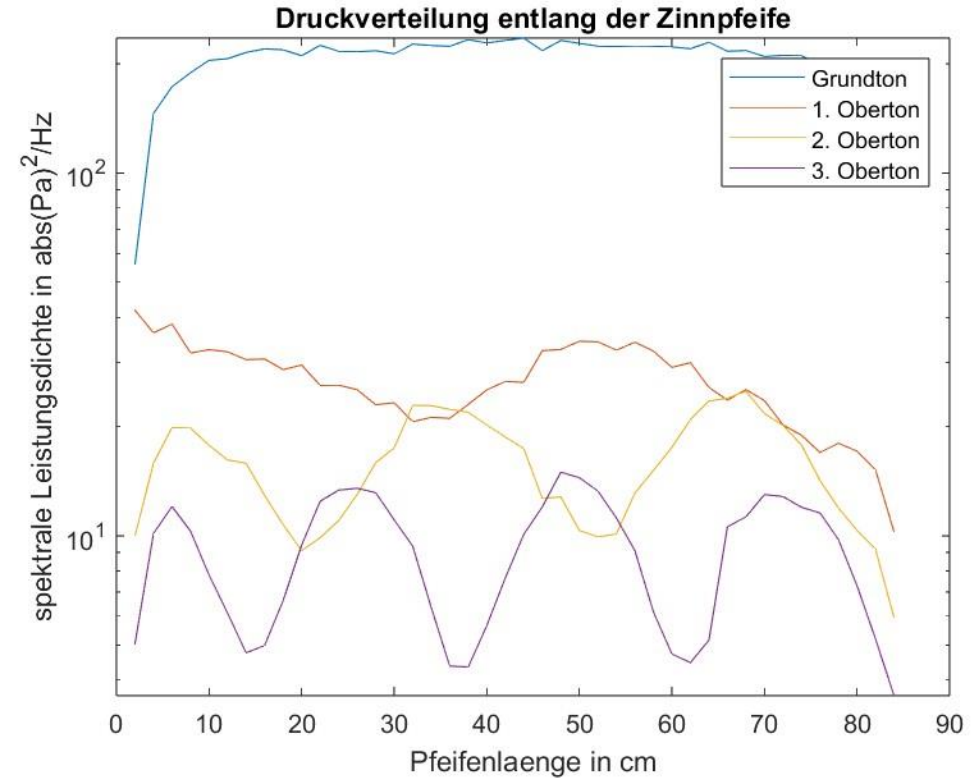
Orgelpfeifen: Julie Lehnert, Orgel der Kreuzkirche am Kaßberg



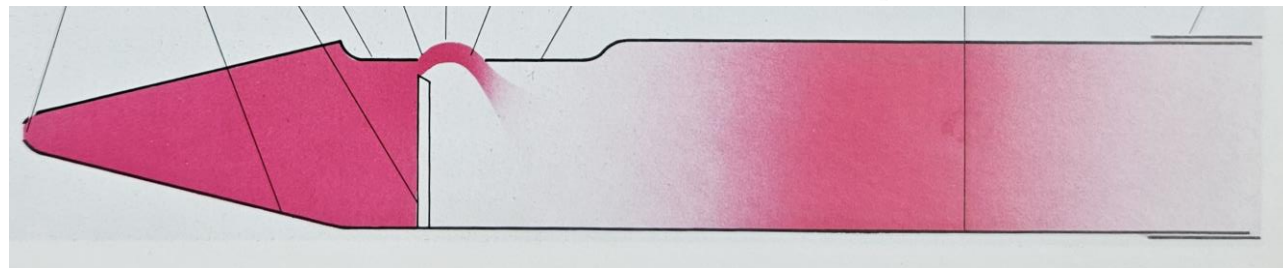
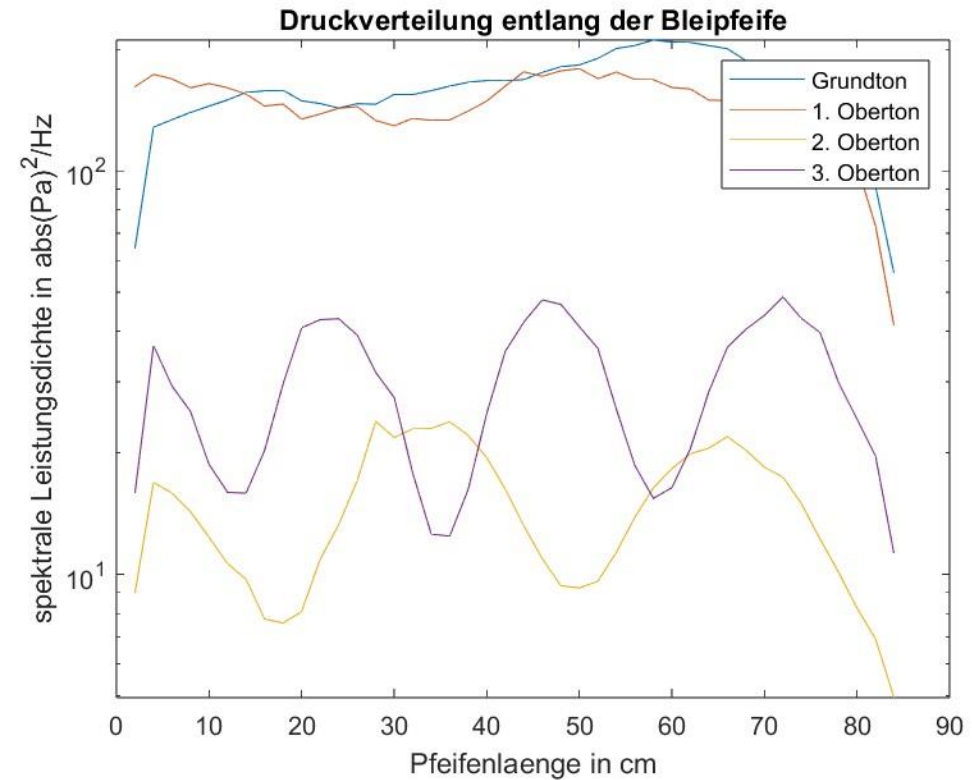
Vermessung der Druckverteilung (rot schattiert) einer Orgelpfeife



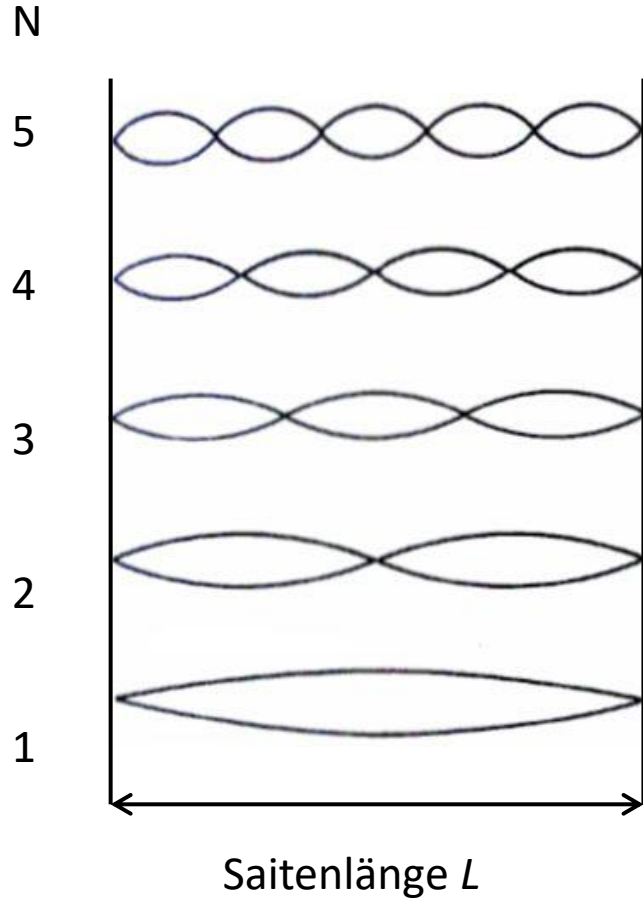
Orgelpfeife: Julie Lehnert in der Orgelwerkstatt Wegscheider, Dresden



Orgelpfeife: Julie Lehnert in der Orgelwerkstatt Wegscheider, Dresden



Eindimensionales System

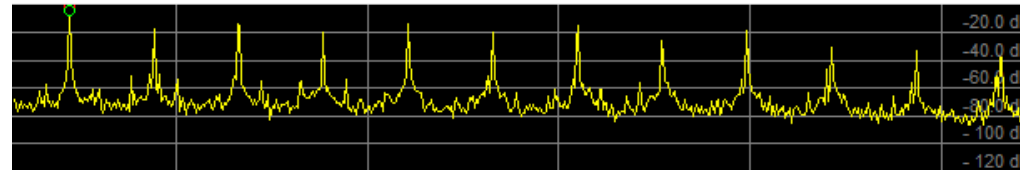


Wellenlänge

$$\lambda = \frac{2L}{N}$$

Frequenz

$$f = N \frac{c}{2L}$$



Frequenz

2D – Pauke, Trommel,... und Resonanzböden von Instrumenten

Zwei Dimensionen



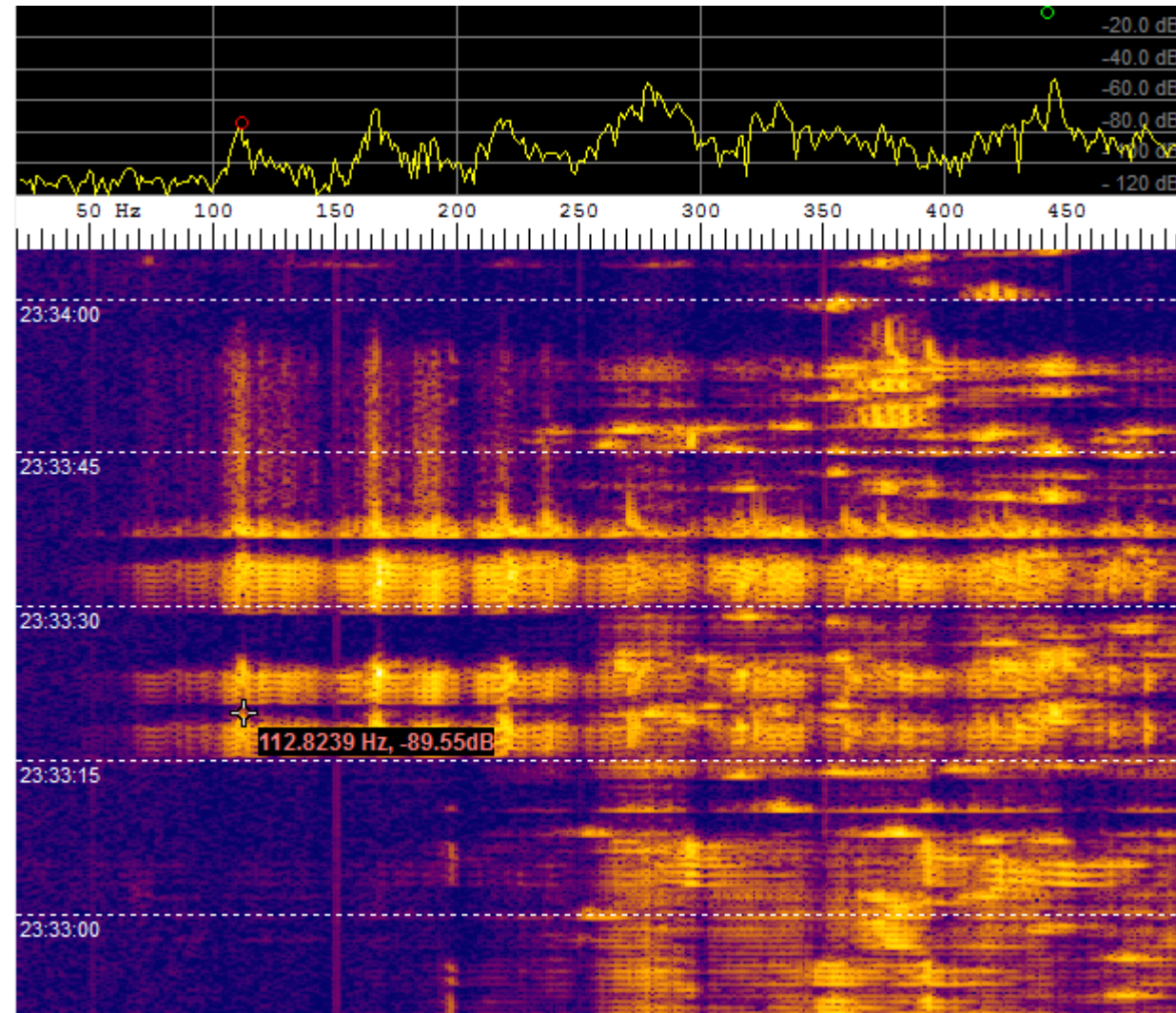
Das Klangspektrum einer Pauke

Stark:

- 112 Hz (1)
- 165 Hz (1.5)
- 220 Hz (2)
- 272 Hz (2.4)

Schwach:

- 192 Hz (1.7)
- 237 Hz (2.1)

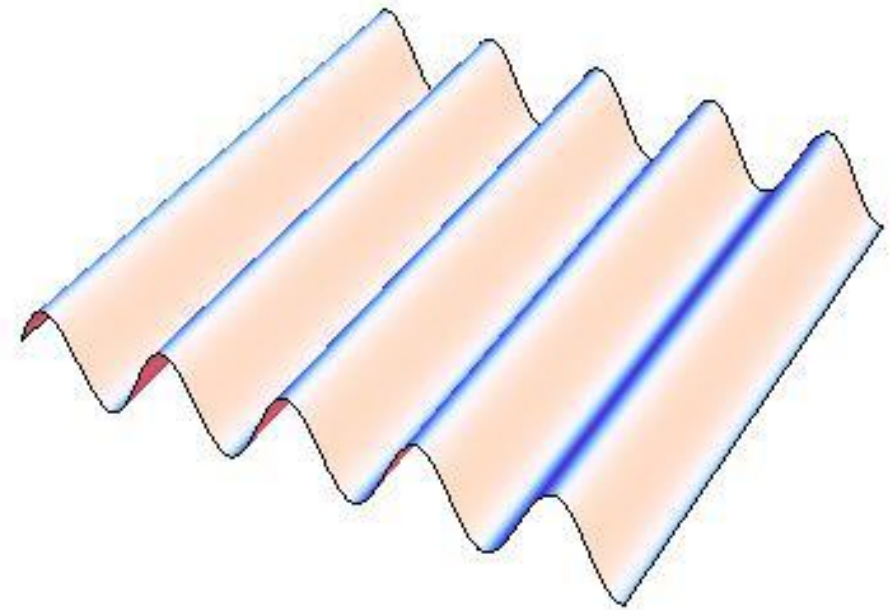


Wellen auf einer Fläche (Membran)

Wellengleichung (ähnlich wie in 1d)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

Lösung: Pulse, Pulszüge, Sinuswellen,...

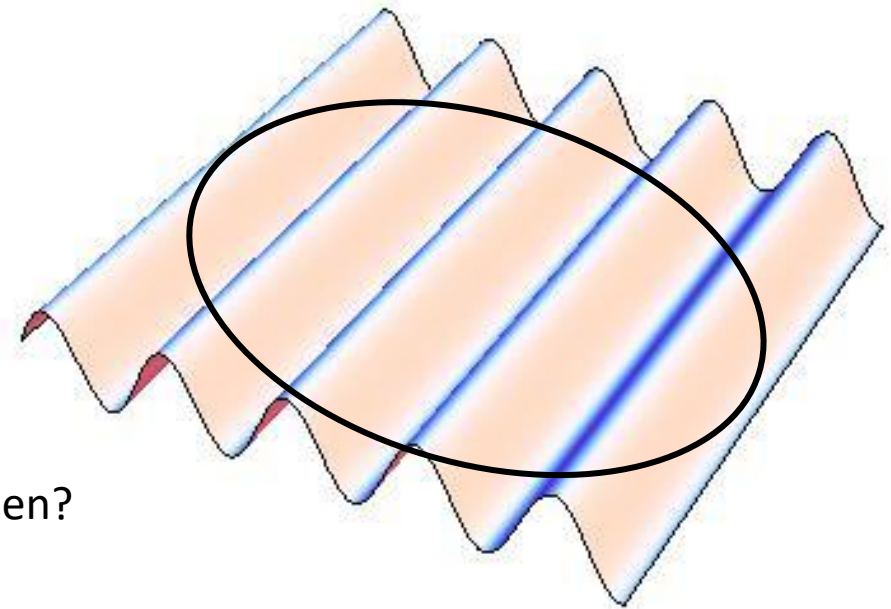


Wellen auf einer Fläche (Membran)

Wellengleichung (ähnlich wie in 1d)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

Lösung: Pulse, Pulszüge, Sinuswellen,...



Wie lässt sich diese Welle auf einer kreisrunden Membran einspannen?

...passt nicht zu den Randbedingungen

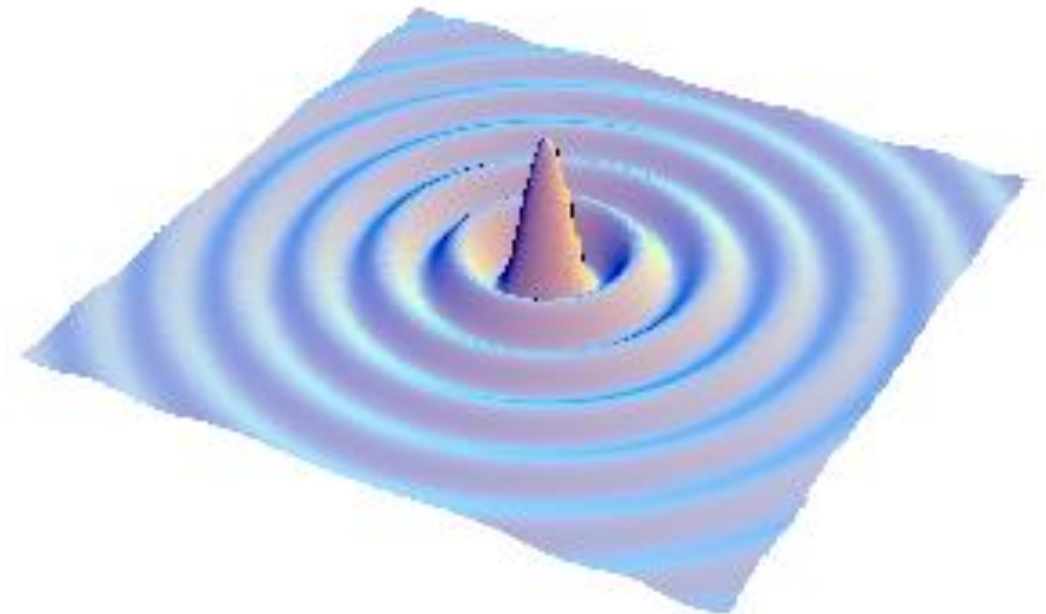
Wellen auf einer Fläche (Membran)

Wellengleichung (ähnlich wie in 1d)

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

Lösung: Pulse, Pulszüge, Sinuswellen,...

... Kreiswellen



Wellen auf einer Fläche (Membran)

Wellengleichung (ähnlich wie in 1d)

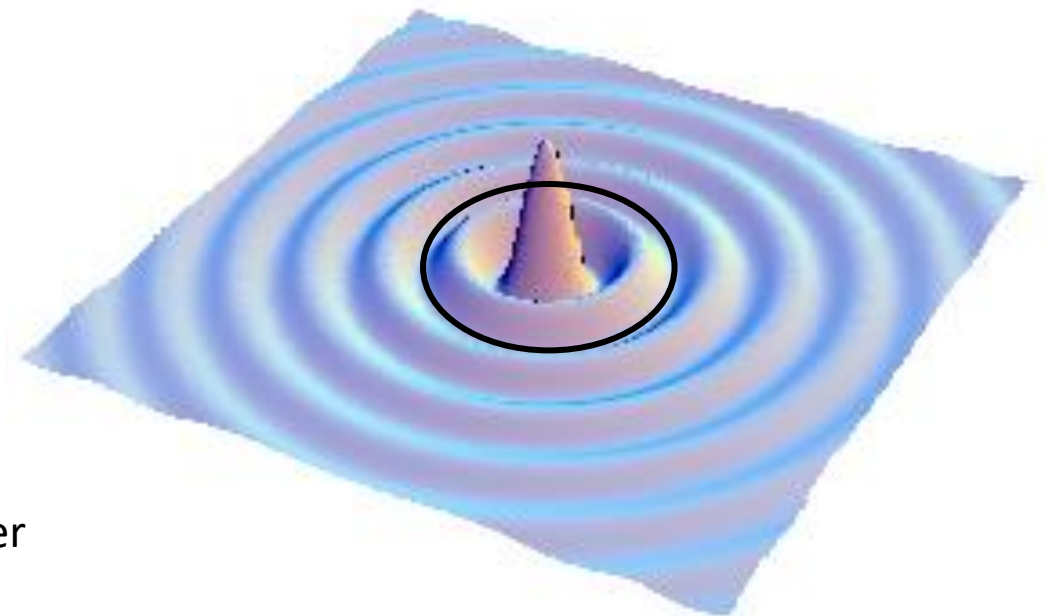
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

Lösung: Pulse, Pulszüge, Sinuswellen,...

... Kreiswellen

Die Kreiswelle kann man auf der Membran einspannen.

→ Mode der Membran



Wellen auf einer Fläche (Membran)

Wellengleichung (ähnlich wie in 1d)

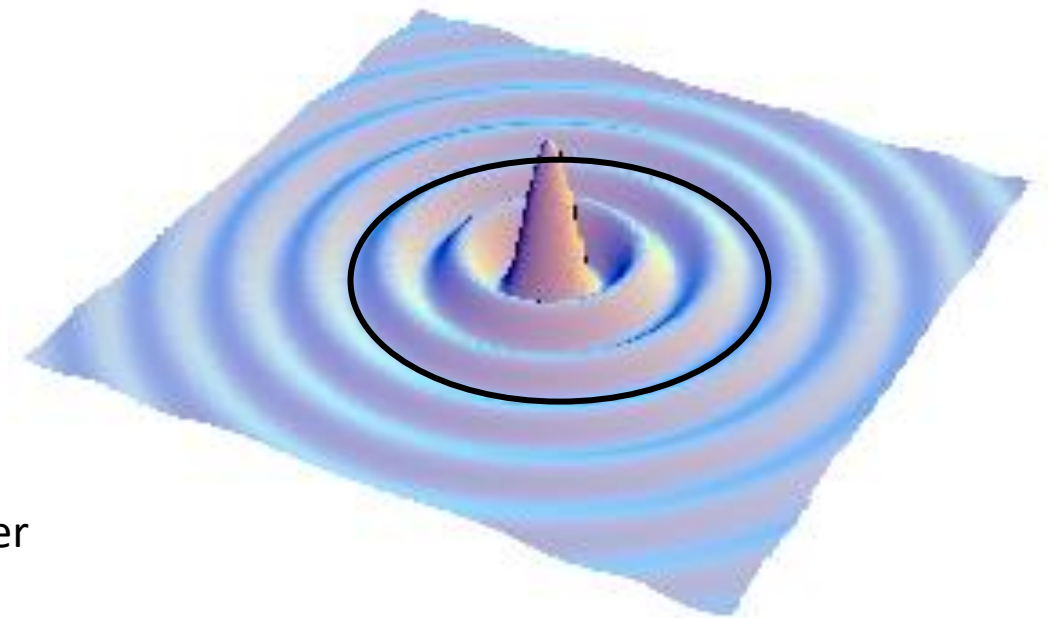
$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = c^2 \cdot \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)$$

Lösung: Pulse, Pulszüge, Sinuswellen,...

... Kreiswellen

Die Kreiswelle kann man auf der Membran einspannen.

→ Mode der Membran

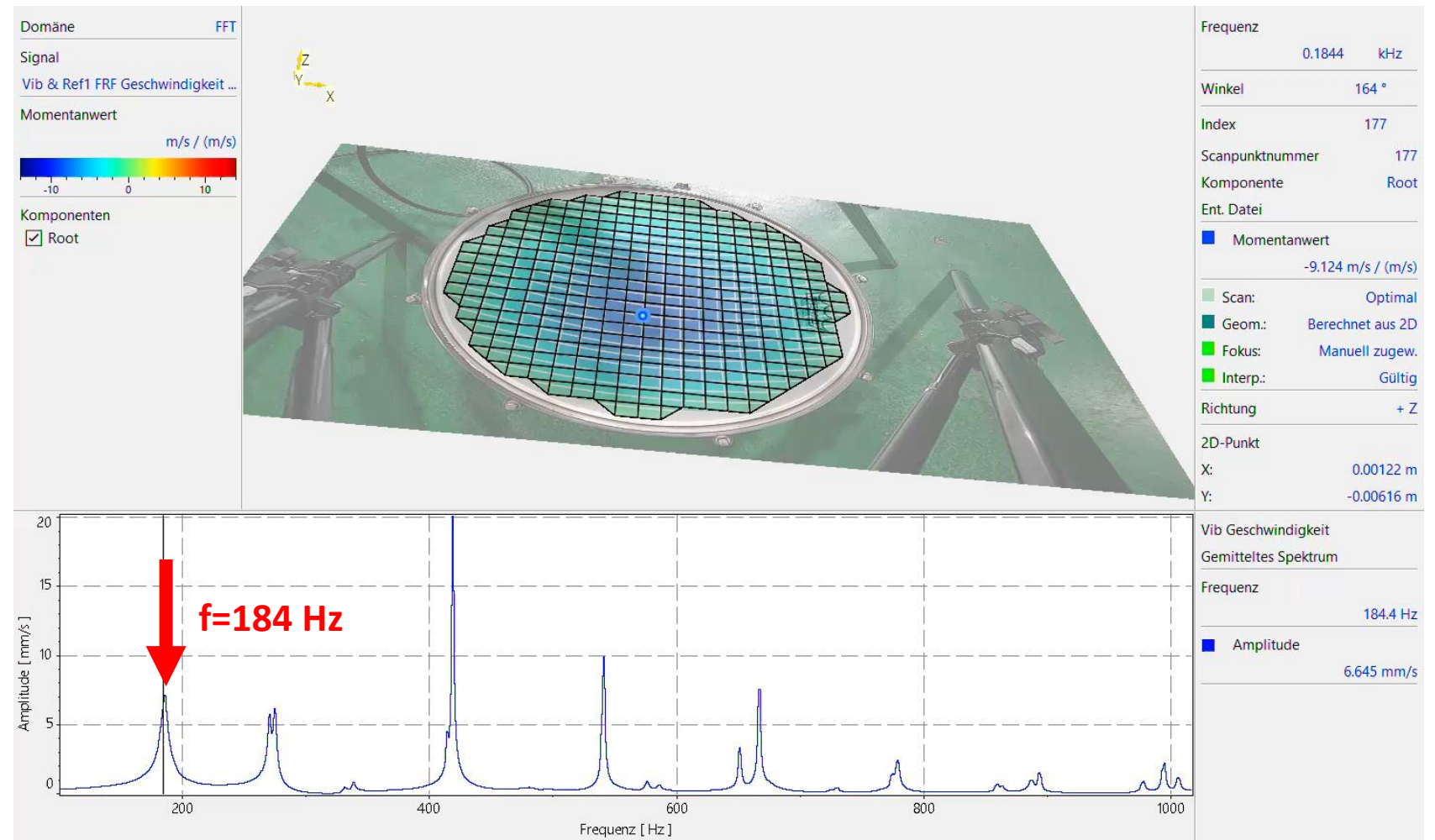


Bessel-Funktion (statt Sinus)

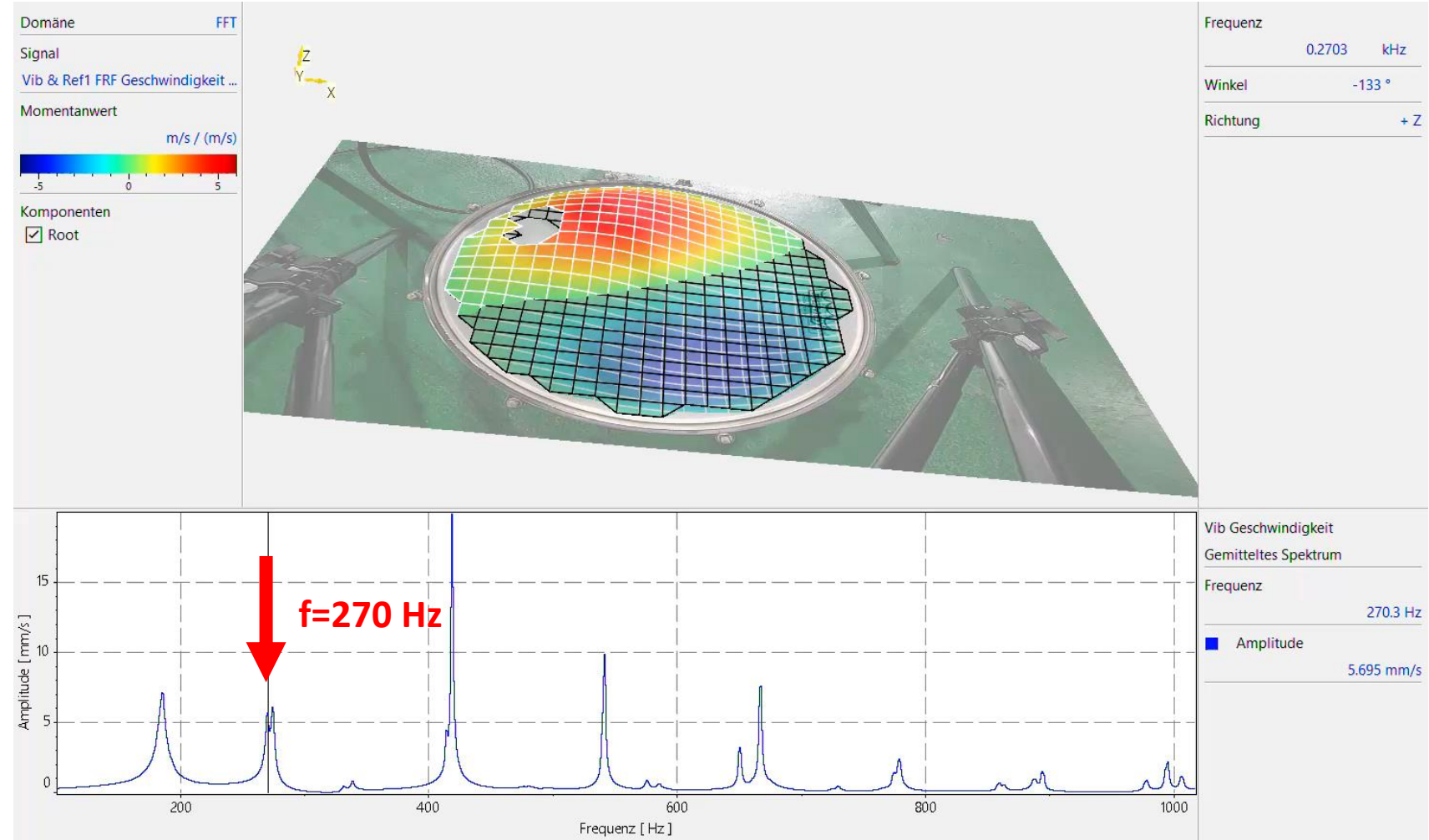
Snare: Vincent T. Sammler, Toms von Sonor und Polytec Laser-Scanner



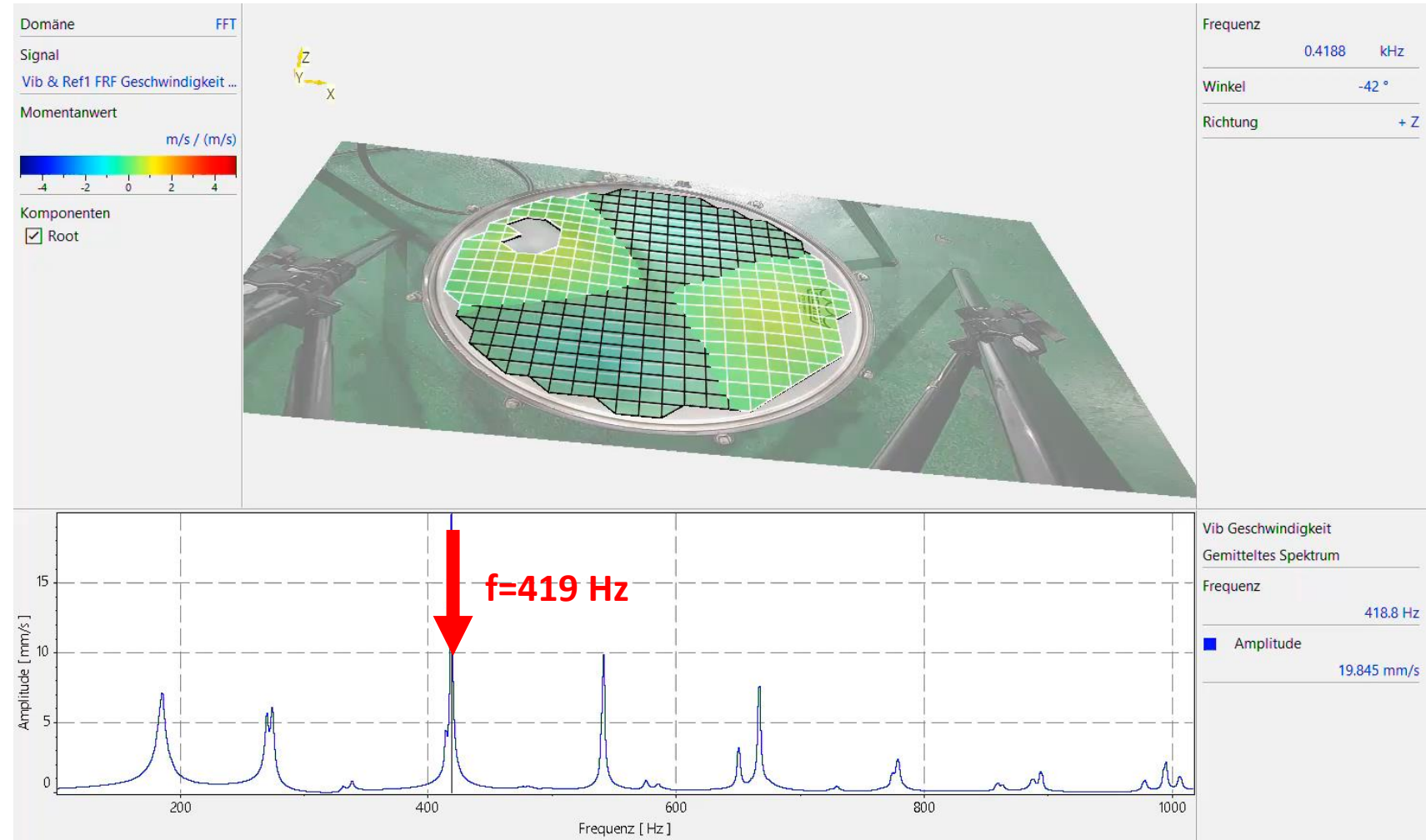
Snare: Vincent T. Sammler, Toms von Sonor und Polytec Laser-Scanner



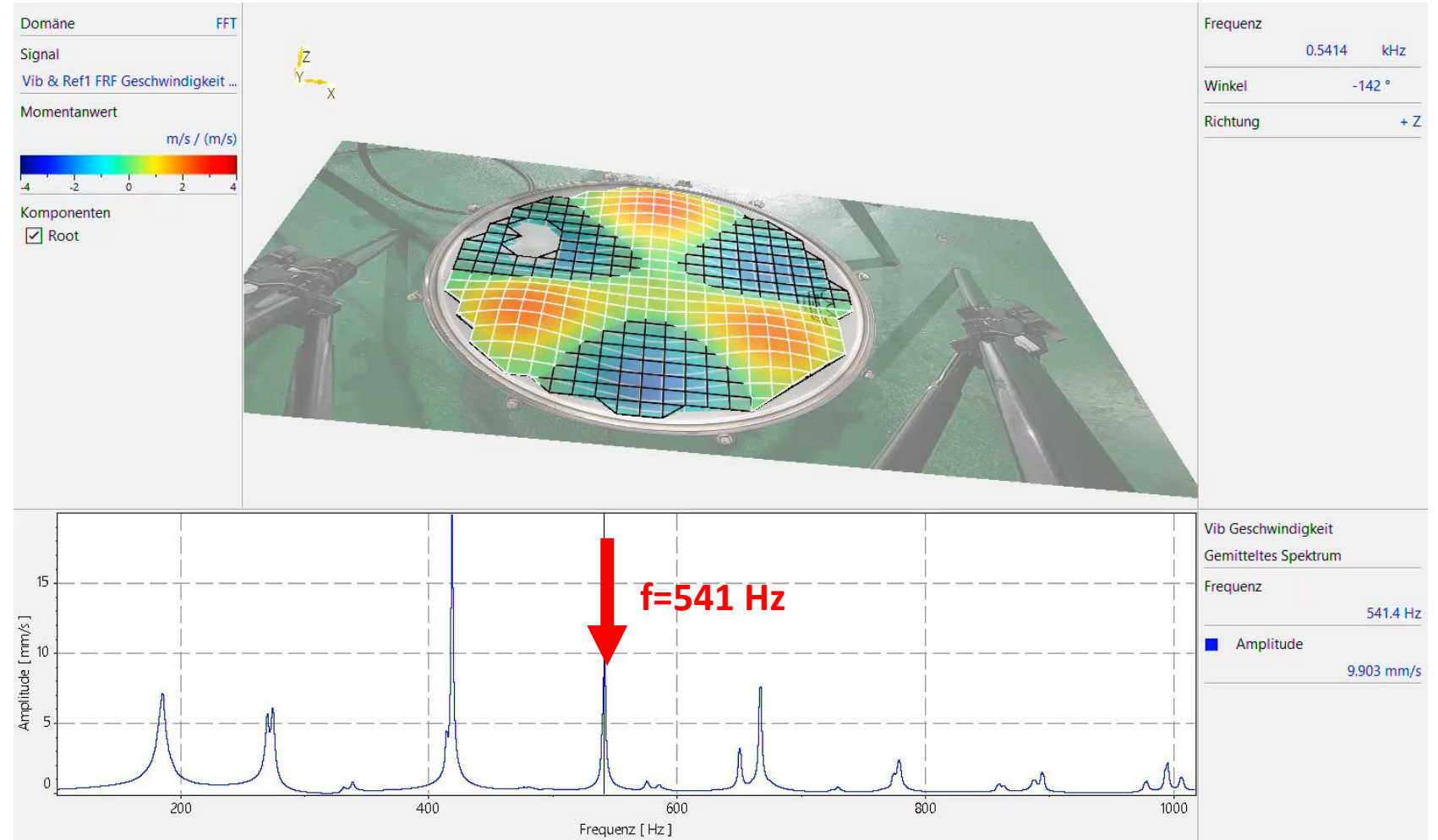
Snare: Vincent T. Sammler, Toms von Sonor und Polytec Laser-Scanner



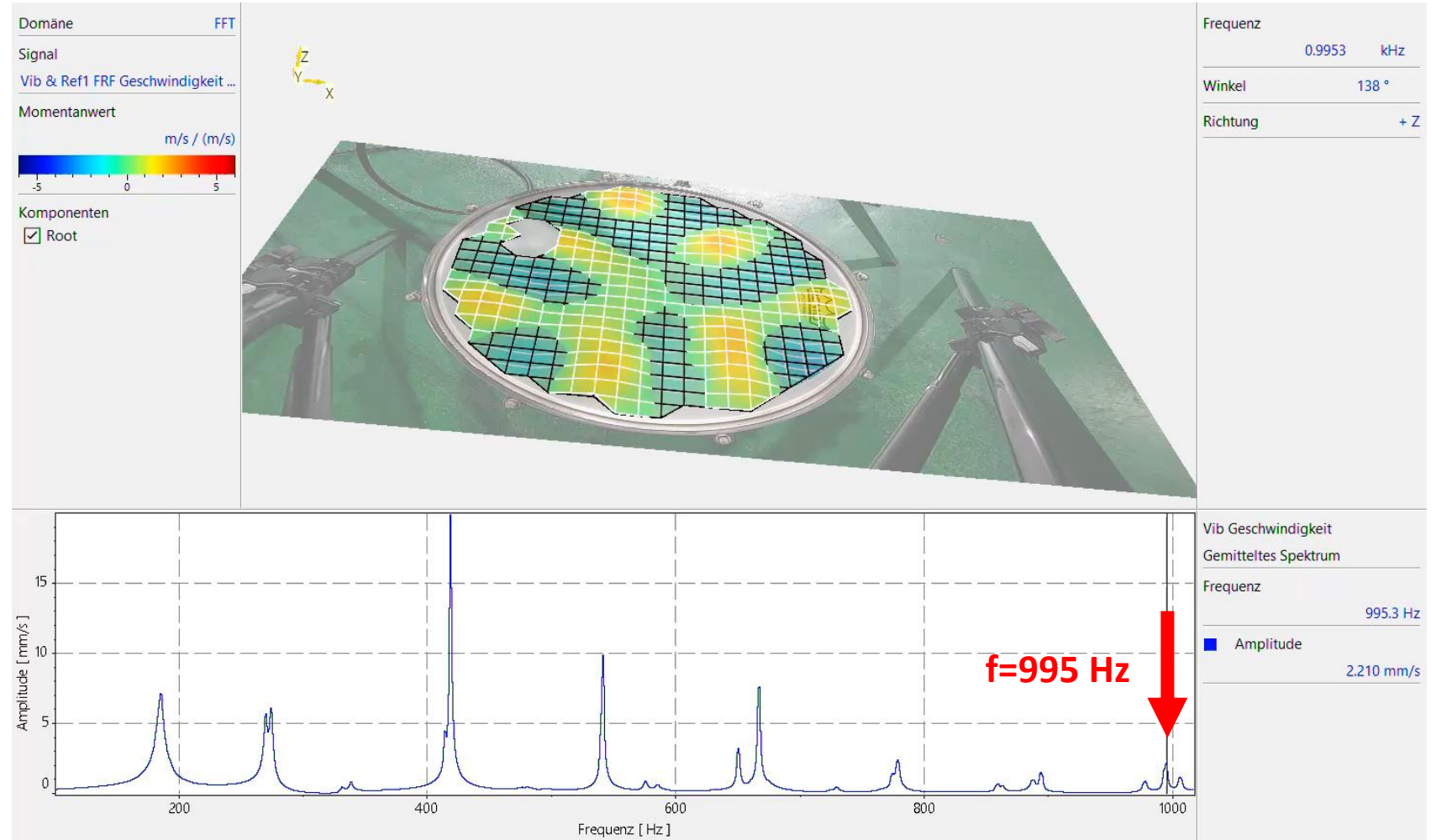
Snare: Vincent T. Sammler, Toms von Sonor und Polytec Laser-Scanner



Snare: Vincent T. Sammler, Toms von Sonor und Polytec Laser-Scanner

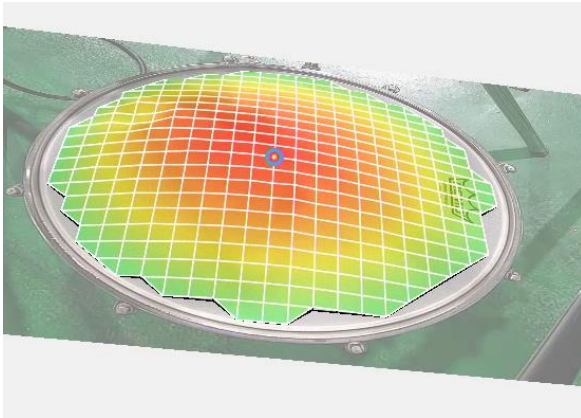


Snare: Vincent T. Sammler, Toms von Sonor und Polytec Laser-Scanner

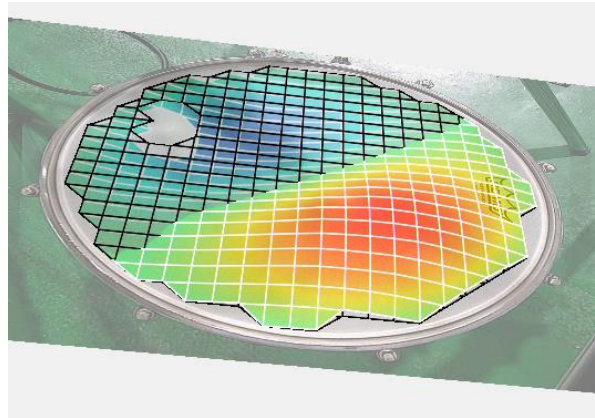


Die Obertöne der Snare bilden keine harmonische Reihe

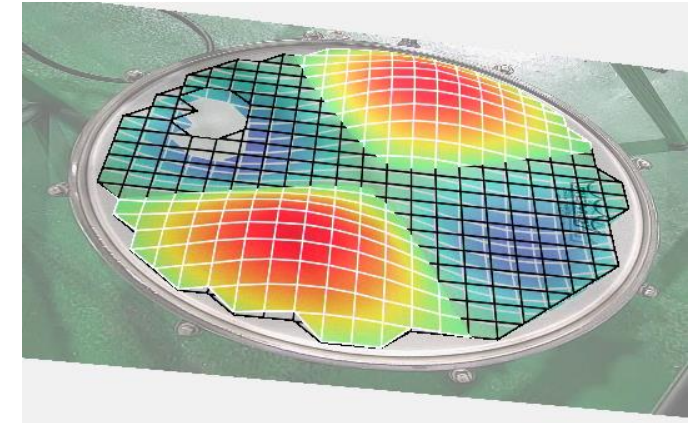
$f_0 = 184 \text{ Hz}$



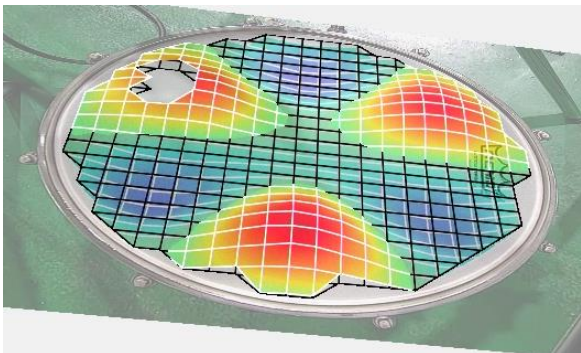
$1.47 f_0 = 270 \text{ Hz}$



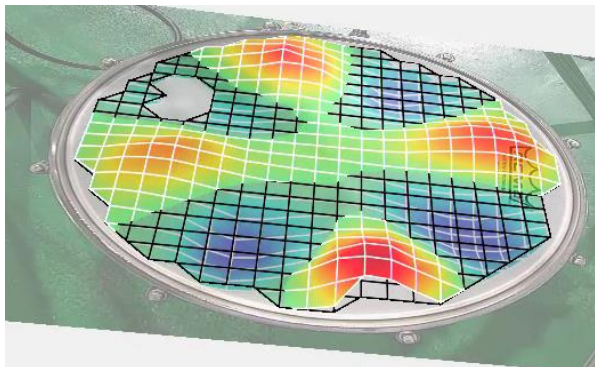
$2.27 f_0 = 418 \text{ Hz}$



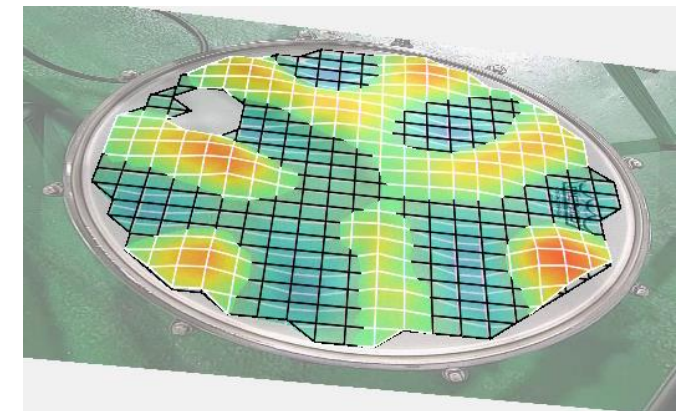
$2.94 f_0 = 541 \text{ Hz}$



$3.63 f_0 = 667 \text{ Hz}$



$5.41 f_0 = 995 \text{ Hz}$

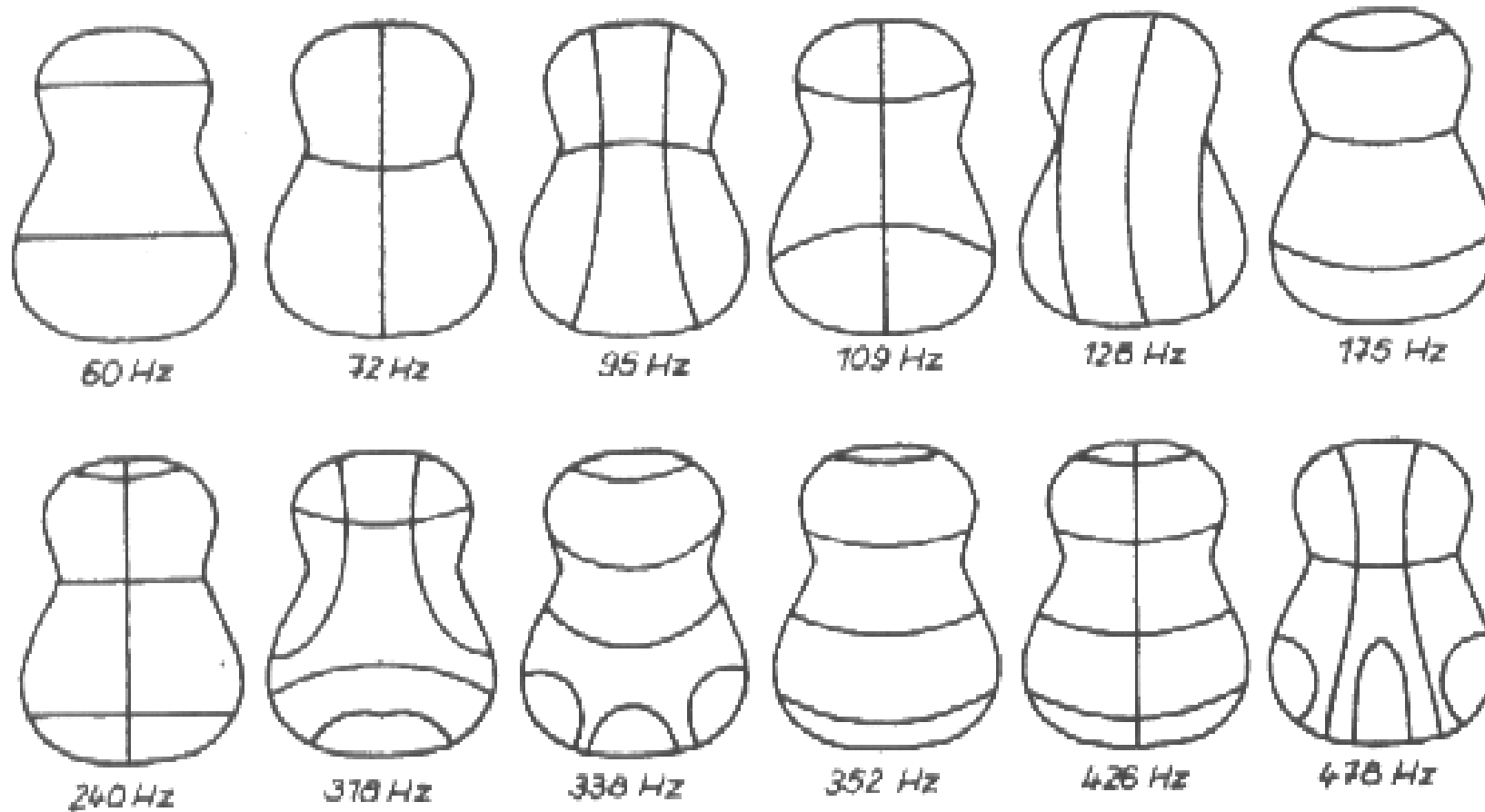


Chladnische Klangfiguren

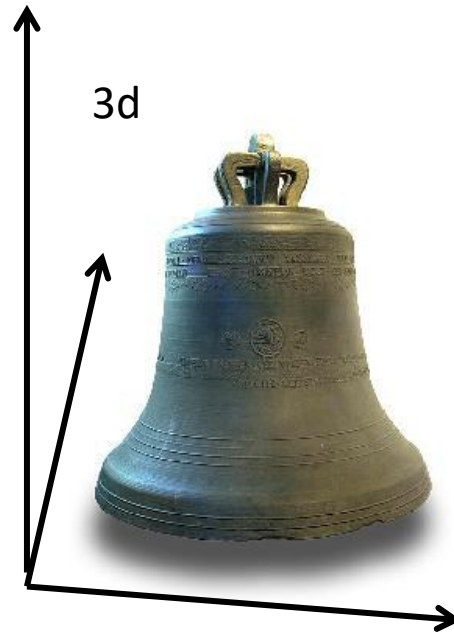


E. F. F. Chladni, 1756 - 1827

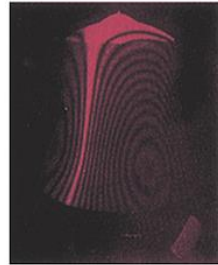
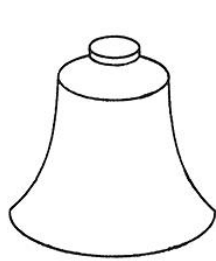
Chladnische Klangfiguren einer Gitarre



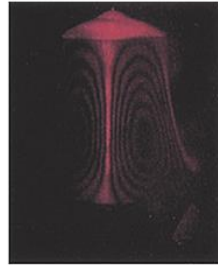
3D – Glocke, Röhrenglocke, Xylophon,...



3D – Glocke, Röhrenglocke, Xylophon,...



523 Hz



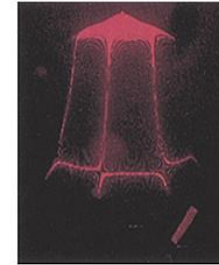
1569 Hz



2532 Hz



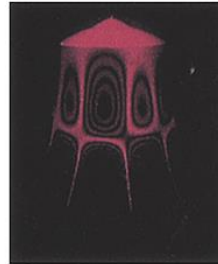
2819 Hz



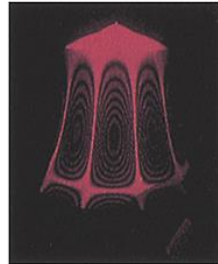
3104 Hz



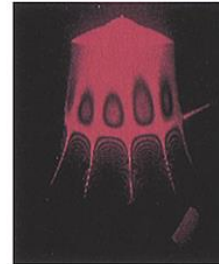
3866 Hz



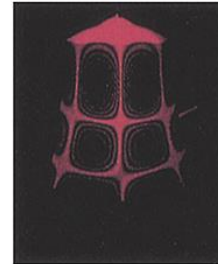
3957 Hz



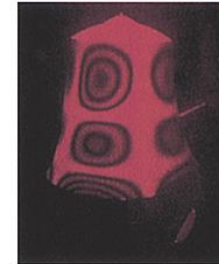
4709 Hz



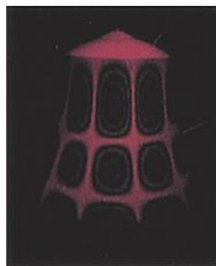
5323 Hz



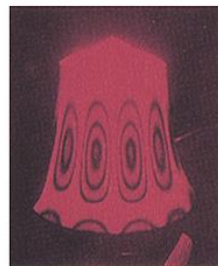
5435 Hz



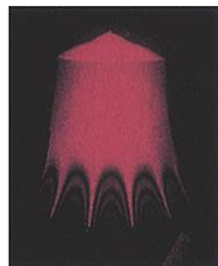
6137 Hz



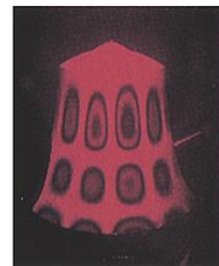
6263 Hz



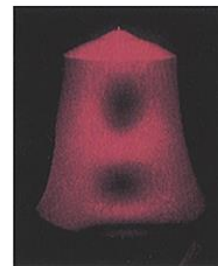
6571 Hz



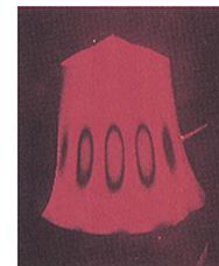
6892 Hz



7962 Hz



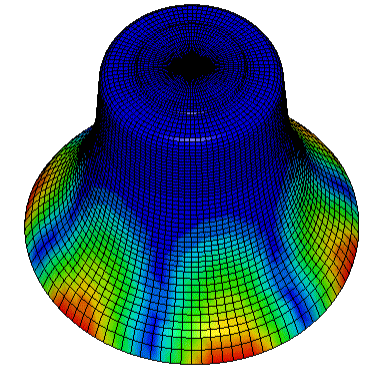
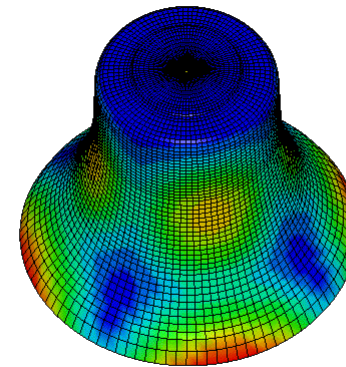
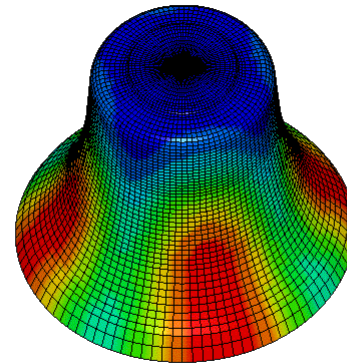
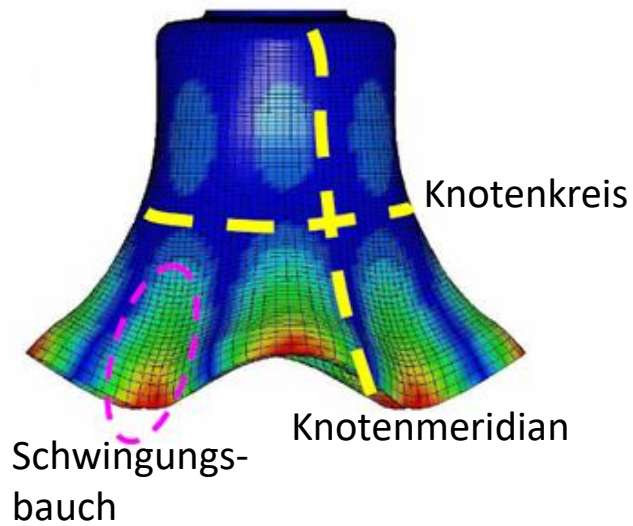
8002 Hz



8639 Hz

3D – Glocke, Röhrenglocke, Xylophon,...

Computersimulation mit finiten Elementen



Dur-Glocke (major third bell)

Major third = große Terz

„Evolution“ aus normaler Glocke
nicht möglich

1985 anhand von Finite-Elemente
Computersimulationen von
niederländischen Wissenschaftlern
gelingen



Dur-Glocke

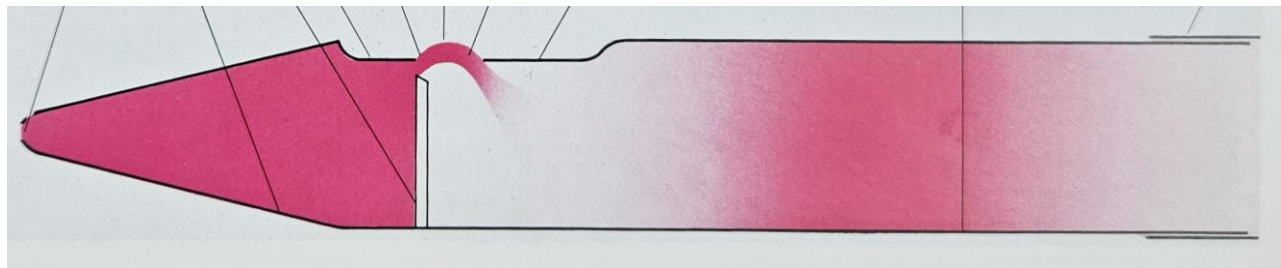
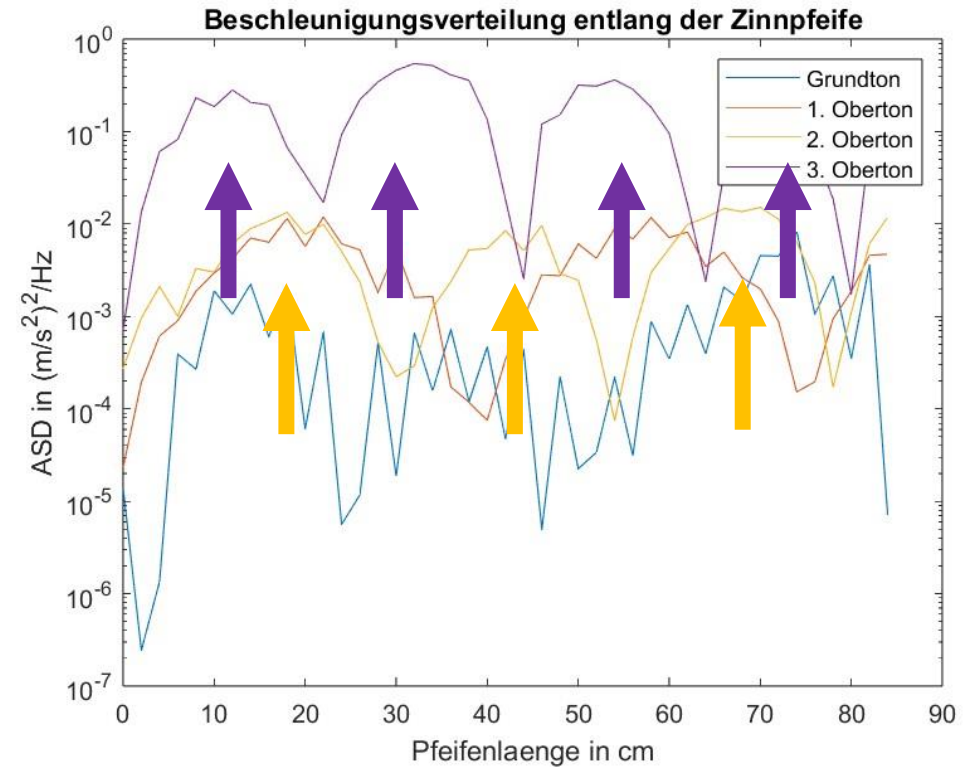


Moll-Glocke

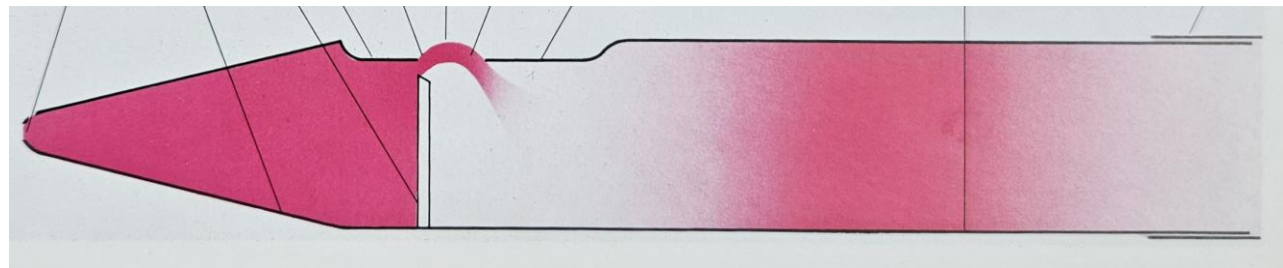
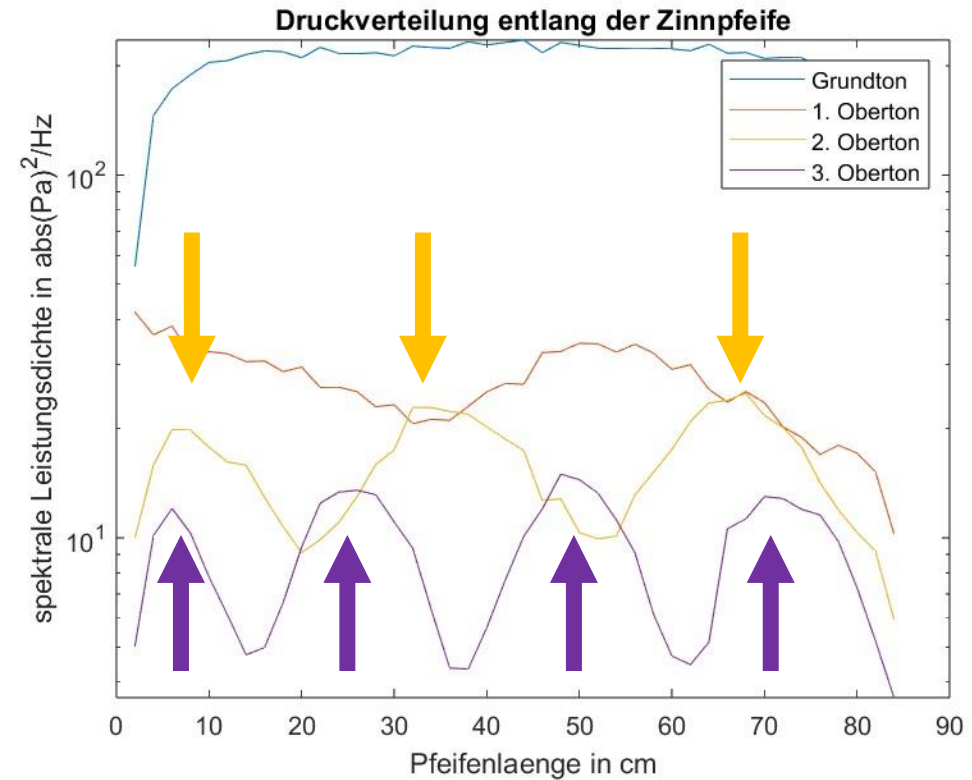


<http://www.hibberts.co.uk/compat.htm>

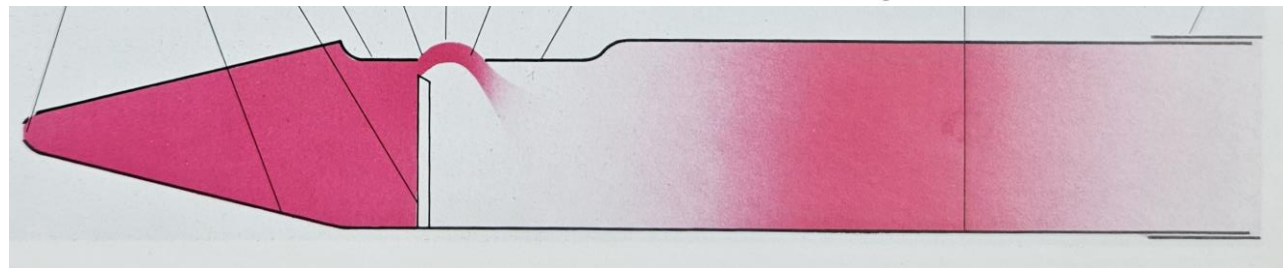
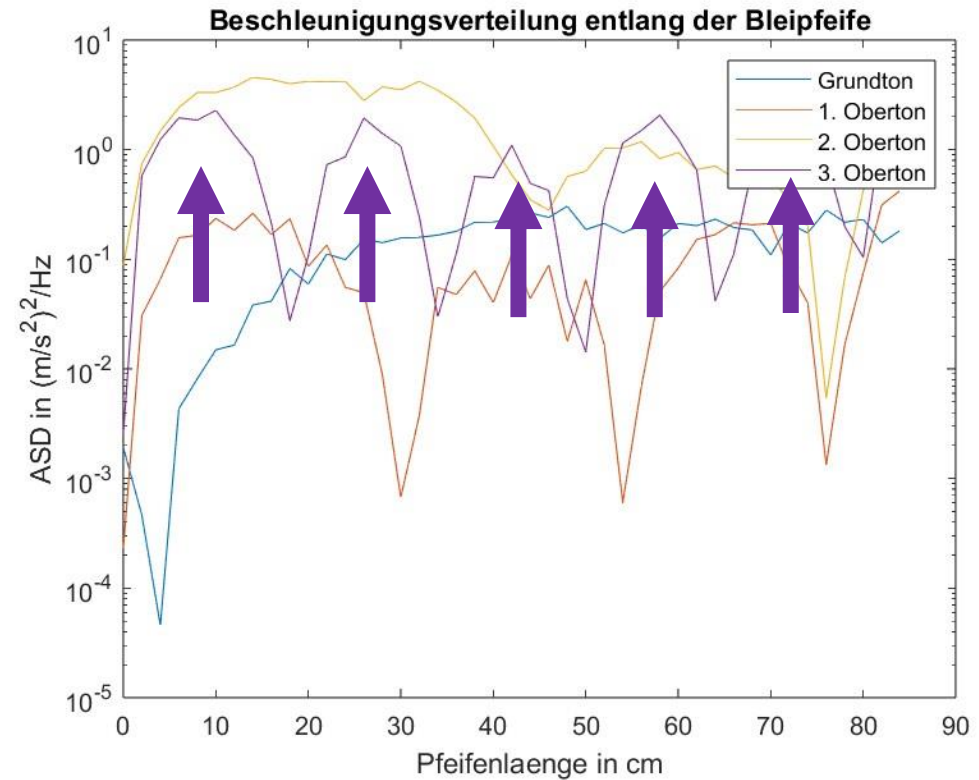
Orgelpfeife: Julie Lehnert in der Orgelwerkstatt Wegscheider, Dresden



Orgelpfeife: Julie Lehnert in der Orgelwerkstatt Wegscheider, Dresden



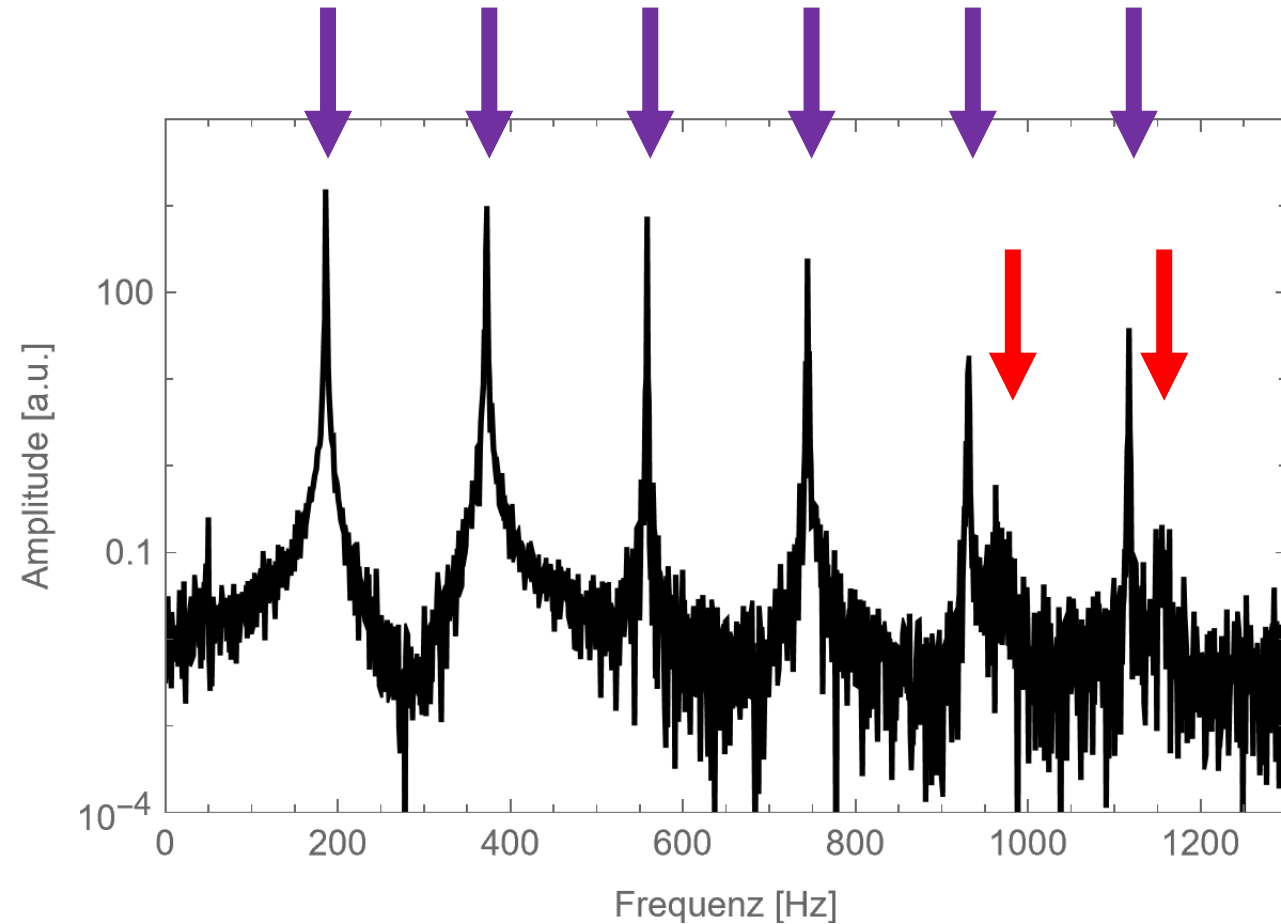
Orgelpfeife: Julie Lehnert in der Orgelwerkstatt Wegscheider, Dresden



Orgelpfeife: Julie Lehnert in der Orgelwerkstatt Wegscheider, Dresden



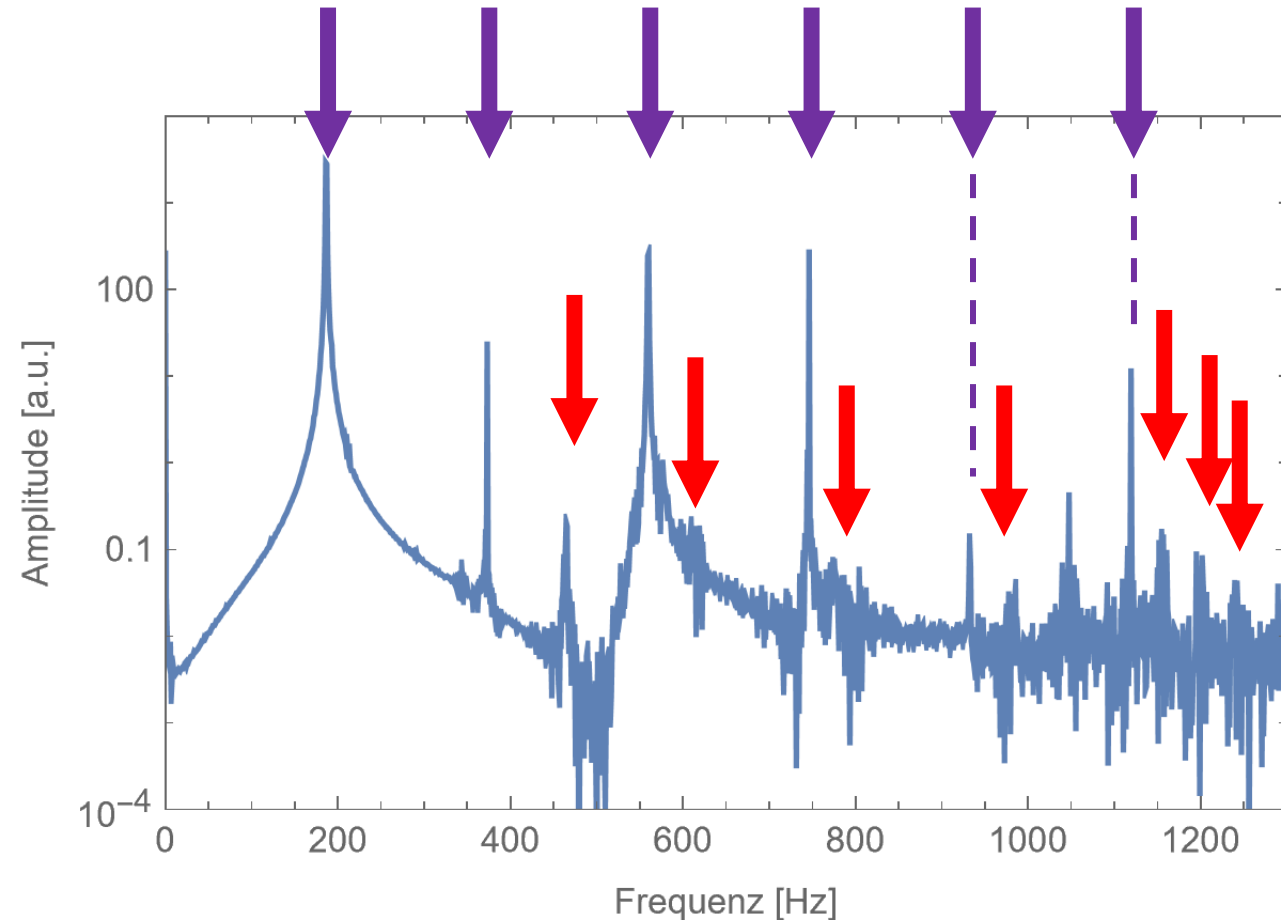
Druckschwingung: harmonisches Obertonspektrum



Orgelpfeife: Julie Lehnert in der Orgelwerkstatt Wegscheider, Dresden



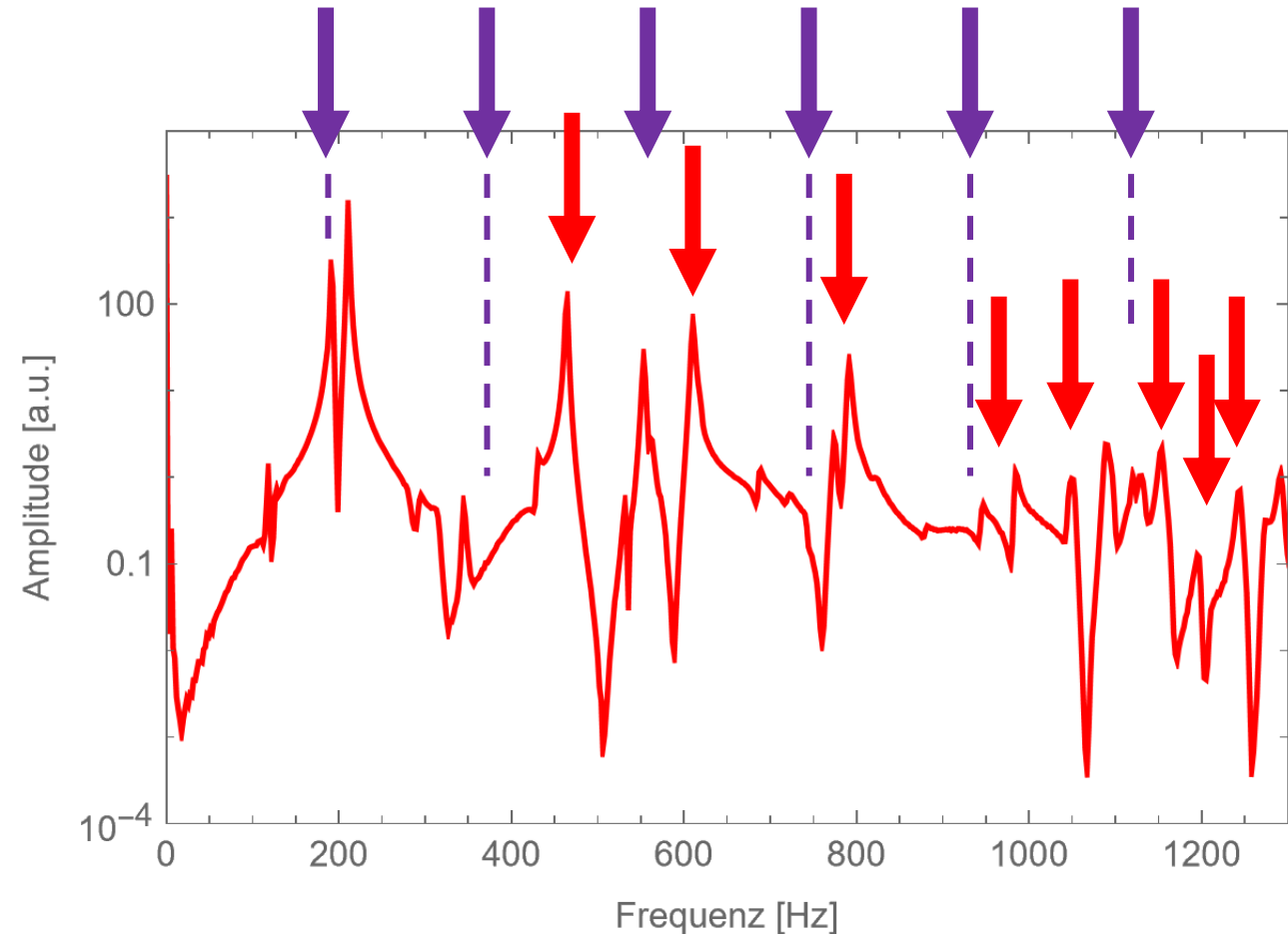
Wandschwingung der angeblasenen Pfeife



Orgelpfeife: Julie Lehnert in der Orgelwerkstatt Wegscheider, Dresden



Wandschwingung der angeschlagenen Pfeife



Gemeinsam atmen...

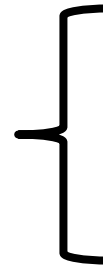
Schwingung f

0D

Welle f, λ

1D, 2D, 3D

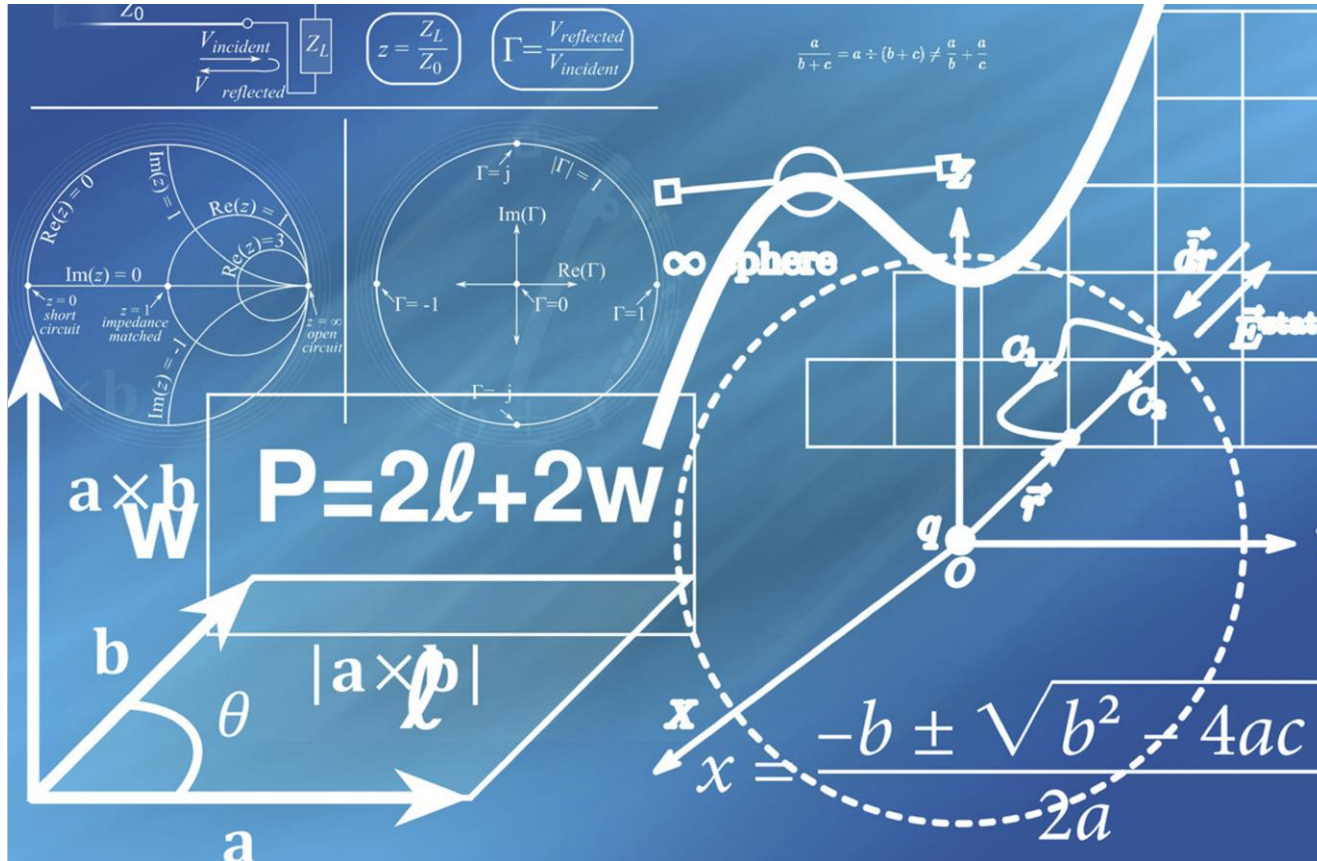
Frequenzspektrum



1D \Rightarrow harmonische Obertöne

2D, 3D \Rightarrow unregelmäßige Obertöne

Kulturgut Mathematik (oder Physik) und Musik



Dank an:

Nancy Gibson, Städtische Musikschule

Stephan Tischendorf, Evangelische Forum

Vladimir Shikhman, Fakultät für Mathematik

Julie Lehnert, Vincent T. Sammler, Philipp Löschau

Nächster Vortrag:

Prof. Dr. Uta Freiberg, TU Chemnitz

Alles eine Frage der Stimmung?

Dienstag, 6. Mai 2025 18:00 Uhr

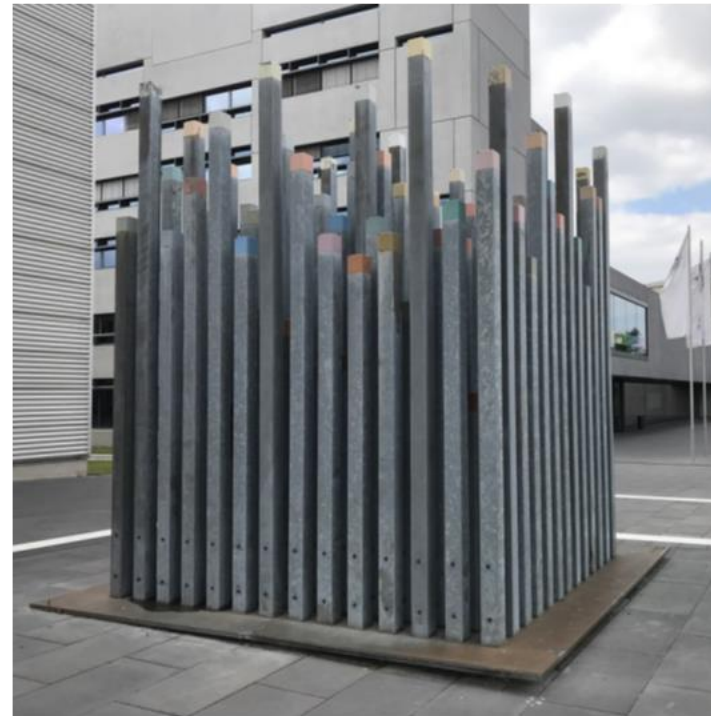
Konzertsaal der Musikschule



Klangexperimente und Interaktionen an der Skulptur „Denk- und Wahrnehmungsmodell für Farbe“

14:00-17:45 Uhr

TUCtag am 10. Mai 2025



Stelenkunstwerk „Denk- und Wahrnehmungsmodell der Farbe“ von Stefan Nestler (1998)



Experimente zum Mithören und Mitmachen