

Prof. Dr. Vladimir Shikhman
Professur für Wirtschaftsmathematik
Technische Universität Chemnitz

Übungsleiter: David Müller
david.mueller@mathematik.tu-chemnitz.de

Mathematische Modelle in den Wirtschaftswissenschaften (WS 2018-19)
Übung 5: Input-Output-Modell nach Leontieff

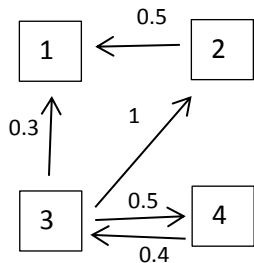
Eine $n \times n$ Matrix $A \geq 0$ mit nichtnegativen Einträgen heißt produktiv, wenn

$$\exists \bar{x} \geq 0 \text{ mit } \bar{x} > A\bar{x}.$$

1) Zeigen Sie für eine produktive Matrix $A \geq 0$ folgende Behauptungen:

- (i) $x \geq Ax \Rightarrow x \geq 0$,
- (ii) die Matrix $I - A$ ist invertierbar,
- (iii) $(I - A)^{-1} \geq 0$.
- (iv) Diskutieren Sie die ökonomische Bedeutung von (i) und (iii).

2) Die Ökonomie sei durch den Gozintographen aus der Vorlesung gegeben:



Berechnen Sie die Produktion, die notwendig ist, um den Konsum $y = (1, 2, 3, 4)^T$ innerhalb der Ökonomie zu gewährleisten.

3) Erweitern Sie das Input-Output-Modell nach Leontieff um die Arbeit, indem Sie das folgende System betrachten:

$$x - Ax = y, \quad b^T x \leq L,$$

wobei $A \geq 0$ Produktionsmatrix, $y \geq 0$ Konsumvektor, x Produktionsvektor, $b \geq 0$ Arbeitsbedarfsvektor und $L > 0$ vorhandene Arbeit bezeichnen.

Wie sind Güterpreise und Arbeitslöhne fair zu definieren, d.h. die Ausgaben der Arbeiter stimmen mit dem Profit der Produzenten überein?