

*Prof. Dr. Vladimir Shikhman*  
*Professur für Wirtschaftsmathematik*  
*Technische Universität Chemnitz*

**Mathematische Modelle in den Wirtschaftswissenschaften (WS 2016-17)**  
**Übung 15: Wachstumsmodell nach Solow**

Das Wachstumsmodell nach Solow beschreibt die zeitliche Entwicklung von Kapital  $K$  und Arbeit  $L$  mit Hilfe folgender Differentialgleichungen:

$$\dot{K} = sTQ, \quad \dot{L} = \lambda L,$$

wobei  $Q = f(K, L)$  Produktionsfunktion,  $s$  Sparquote,  $\lambda$  Bevölkerungswachstumsrate und  $T$  Technologieniveau sind.

1) Im Wachstumsmodell von Solow sei die Cobb-Douglas Produktionsfunktion  $f(K, L) = K^\alpha L^{1-\alpha}$ ,  $\alpha \in [0, 1]$ , angenommen.

- (a) Leiten Sie die zeitliche Entwicklung des Pro-Kopf-Kapitals  $k := \frac{K}{L}$  her.
- (b) Finden Sie das Gleichgewicht von Pro-Kopf-Kapital als deren Grenzwert.
- (c) Untersuchen Sie die Abhängigkeit von Pro-Kopf-Output bzgl.  $s$  und  $\lambda$ .

2) Die Goldene Regel der Akkumulation beschreibt diejenige Sparquote  $s$  in einer Volkswirtschaft, durch die der Pro-Kopf-Konsum im Gleichgewicht  $k(s)$  maximiert wird:

$$\max_s (1 - s)Tf(k(s), 1).$$

- (a) Formulieren und interpretieren Sie die notwendige Optimalitätsbedingung für die Goldene Regel der Akkumulation.
- (b) Wie lautet die Goldene Regel der Akkumulation im Falle der Cobb-Douglas Produktionsfunktion?