

Prof. Dr. Vladimir Shikhman  
Professur für Wirtschaftsmathematik  
Technische Universität Chemnitz

Übungsleiter: David Müller  
david.mueller@mathematik.tu-chemnitz.de

**Mathematische Modelle in den Wirtschaftswissenschaften (WS 2017-18)**  
**Übung 13: Risikodiversifikation und Portfoliooptimierung nach Markowitz**

1) Es seien  $n_i$  Messdaten  $r_1^i, \dots, r_n^i$  einer Rendite  $R^i$  gegeben. Der Erwartungswert, die Varianz der Rendite  $R^i$ , und die Kovarianz zweier Rendite  $R^i$  und  $R^j$  sind

$$\mu_i := \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} r_k^i, \quad (\sigma_i)^2 := \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} (r_k^i - \mu_i)^2, \quad \sigma_{ij} := \frac{1}{n_i n_j} \sum_{k=1}^{n_i} \sum_{l=1}^{n_j} (r_k^i - \mu_i) (r_l^j - \mu_j).$$

Zeigen Sie  $\sigma_{ij} \leq \sigma_i \cdot \sigma_j$ .

2) Man betrachte das Problem der Portfoliooptimierung

$$\min_w \frac{1}{2} w^T \cdot \Sigma \cdot w \quad \text{s.t.} \quad \mu^T w = r_p, e^T w = 1,$$

wobei  $\Sigma = (\sigma_{ij})$  die Kovarianzmatrix,  $\mu = (\mu_i)_i$  der Vektor von Renditenerwartungswerten,  $r_p$  die gewünschte Rendite,  $e$  der Vektor von Einsen sind. Man nehme an, dass auf dem Markt kein risikofreies Asset vorhanden ist. Zudem seien die verfügbaren Assets linear unabhängig und es gäbe mindestens zwei Renditen mit unterschiedlichen Erwartungswerten.

- (a) Wie wirken sich die ökonomischen Annahmen auf  $\Sigma$  aus d.h., welche mathematischen Eigenschaftn resultieren daraus für  $\Sigma$ ?
- (b) Berechnen Sie das optimale Portfolio aus dem Lagrange-Ansatz. Warum ist die Matrix

$$\begin{pmatrix} \mu^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot \mu & \mu^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot e \\ \mu^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot e & e^T \cdot \Sigma^{-1} \cdot e \end{pmatrix}$$

invertierbar?

- (c) Zeichnen Sie die Varianz entlang des Portfolio Frontiers in Abhängigkeit von  $r_p$  ein. Markieren Sie die effizienten Portfolios.
- (d) Finden Sie das Minimalvarianzportfolio (MVP) auf dem Portfolio Frontier zeichnerisch und rechnerisch.

3) Gegeben seien drei Aktien A,B und C mit folgenden Korrelationskoeffizienten  $\rho(1,3) = -0.2857$   $\rho(1,2) = 0.3333$   $\rho(2,3) = -0.7143$ . Die restlichen Daten entnehmen Sie der Tabelle

Aktie	Erwartungswert der Rendite	Varianz der Rendite
<i>A</i>	0.1	0.25
<i>B</i>	0.12	0.36
<i>C</i>	0.15	0.49

Bestimmen Sie zunächst  $\Sigma$  und berechnen Sie dann das Portfolio Frontier.