

Prof. Dr. Vladimir Shikhman
Professur für Wirtschaftsmathematik
Technische Universität Chemnitz

Übungsleiter: David Müller
david.mueller@mathematik.tu-chemnitz.de

Mathematische Modelle in den Wirtschaftswissenschaften (WS 2017-18)
Übung 8: Ökonomisches Wachstum nach v. Neumann

In einer Ökonomie mit n Gütern und m Aktivitäten seien $n \times m$ Input- und Outputmatrizen $A \geq 0$, $B \geq 0$ mit nicht-negativen Einträgen gegeben.

Das technologische Wachstumsproblem aus der Vorlesung lautet:

Finde $x \geq 0$, $x \neq 0$ und α maximal, so daß $Bx \geq \alpha Ax$.

Das ökonomische Wachstumsproblem aus der Vorlesung lautet:

Finde $p \geq 0$, $p \neq 0$ und β minimal, so daß $p^T B \leq \beta p^T A$.

1) Zeigen Sie mit Hilfe der Linearen Optimierung für eine $n \times m$ Matrix C :

falls $Cx > 0$ keine Lösung $x \geq 0$ besitzt, so existiert $p \geq 0$, $p \neq 0$ mit $p^T C \leq 0$.

Benutzen Sie dieses Resultat, um zu zeigen, dass die ökonomische Wachstumsrate $\bar{\beta}$ die technologische Wachstumsrate $\bar{\alpha}$ nie überschreitet.

2) Die Input- und Outputmatrizen seien für eine Ökonomie wie folgt gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 0.3 & 0.5 \\ 0.6 & 0.4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finden Sie optimale Intensitäts- und Preisvektoren \bar{x} , \bar{p} , sowie zugehörige technologische und ökonomische Wachstumsraten $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$.

3) Im einfachen Wachstumsmodell nach v. Neumann sei die Inputmatrix A produktiv. Zeigen Sie für die zugehörige technologische Wachstumsrate $\bar{\alpha} > 1$. Interpretieren Sie das Ergebnis ökonomisch.