

Prof. Dr. Vladimir Shikhman
Professur für Wirtschaftsmathematik
Technische Universität Chemnitz

Übungsleiter: David Müller
david.mueller@mathematik.tu-chemnitz.de

Mathematische Modelle in den Wirtschaftswissenschaften (WS 2018-19)
Übung 7: Dualität der Linearen Optimierung

1) Die Daten zur landwirtschaftlichen Produktion sind in einem Betrieb wie folgt gegeben:

	Flächenbedarf ha/kg	Arbeitsaufwand St/kg	Ertrag Euro/kg
Raps	1.2	1.6	18
Weizen	0.5	0.5	9
Gerste	0.8	1.0	17
Mais	1.6	2.0	20
Ressource	500 ha	550 St	

- (i) Formulieren Sie das Problem des maximalen Ertrages.
- (ii) Wie lautet das duale Problem der Kostenminimierung?
- (iii) Lösen Sie das duale und primale Problem.

2) Ein Unternehmen verfügt über drei Fabriken, in welchen zwei Güter gemeinsam hergestellt werden. In der folgenden Tabelle finden Sie die zur Herstellung einer Einheit des jeweiligen Gutes benötigten Stunden.

	Fabrik 1	Fabrik 2	Fabrik 3
Gut A	10	20	20
Gut B	20	10	20

Die Vertriebsabteilung in Ihrem Unternehmen konnte einen neuen Auftrag akquirieren, weswegen 300 EH von Gut A und 500 EH von Gut B produziert werden sollen. Die Betriebskosten pro Stunde in den entsprechenden Fabriken belaufen sich hierbei auf 10000 €, 8000 € sowie 11000 €.

- (i) Seien y_1, y_2, y_3 die Stunden in den jeweiligen Fabriken. Entwerfen Sie das Produktionsprogramm unter der Prämisse, dass Ihr Unternehmen so effizient wie möglich produzieren will.
- (ii) Formulieren Sie das duale Problem und lösen Sie dieses.
- (iii) Bestimmen Sie mithilfe der Lösung aus (ii) den optimalen Belegungsplan für Ihr Unternehmen.

3) Es seien Anleihen zu Preisen p_i und mit festgesetzten Auszahlungen Z_i^k für das k -te Jahr, $k = 1, \dots, n$, $i = 1, \dots, I$, auf dem Markt angeboten. Es sollten Cashflows C_1, \dots, C_n sichergestellt werden.

(i) Formulieren Sie das Problem der Portfoliooptimierung.

(ii) Stellen Sie das zugehörige duale Problem der Diskontoptimierung auf.

(iii) Interpretieren Sie die dualen Multiplikatoren als Diskontierungsfaktoren.

4) Benutzen Sie die Theorie der Linearen Optimierung, um die Lösbarkeit des folgenden Systems bzgl. x nachzuweisen:

$$Px = x, \quad x \geq 0, \quad e^T x = 1,$$

wobei $P \geq 0$ und $e^T P = e^T$. Schliessen Sie daraus auf die Existenz der stationären Markenverteilung, des Google-Rankings und der Gleichgewichtspreise in einer Tauschwirtschaft.