

*Prof. Dr. Vladimir Shikhman*  
*Professur für Wirtschaftsmathematik*  
*Technische Universität Chemnitz*

*Übungsleiter: David Müller*  
*david.mueller@mathematik.tu-chemnitz.de*

## **Mathematische Modelle in den Wirtschaftswissenschaften (WS 2017-18)**

### **Übung 2: Discrete Choice nach Luce**

Betrachte das Logit-Modell für Discrete Choice mit Auswahlwahrscheinlichkeiten

$$p_i := \frac{\exp\left(\frac{w_i}{\mu}\right)}{\sum_{i=1}^n \exp\left(\frac{w_i}{\mu}\right)}, \quad i = 1, \dots, n,$$

wobei  $w_i \geq 0$  den wahrgenommenen Nutzen der Alternative  $i \in \{1, \dots, n\}$ , und  $\mu > 0$  einen Parameter bezeichnen.

1) Berechnen Sie die Logit-Wahrscheinlichkeiten für  $\mu \rightarrow 0$  und  $\mu \rightarrow \infty$ . Was drückt der Parameter  $\mu$  aus? Leiten Sie für die Alternative mit maximalem Nutzen deren Auswahlwahrscheinlichkeit nach  $\mu$  ab. Ist das Ergebnis konsistent zur Grenzwertbetrachtung?

2) Berechnen Sie die Ableitungen  $\frac{\partial p_i}{\partial w_i}$  und  $\frac{\partial p_i}{\partial w_j}$ ,  $j \neq i$  nach dem wahrgenommenen Nutzen.

Was sind die relativen Änderungsraten (die sogenannten Elastizitäten)

$$\varepsilon_{w_i}^{p_i} := \frac{\partial p_i}{\partial w_i} : \frac{p_i}{w_i}, \quad \varepsilon_{w_j}^{p_i} := \frac{\partial p_i}{\partial w_j} : \frac{p_i}{w_j}, \quad j \neq i?$$

Zeigen Sie, dass die Elastizitäten  $\varepsilon_{w_j}^{p_i}$  für alle Alternativen  $i \neq j$  gleich sind. Was bedeutet das ökonomisch?

3) Zeigen Sie: Wenn eine Alternative  $j$  entfernt wird, dann steigt die Wahrscheinlichkeit, eine andere beliebige Alternative  $i \neq j$  zu wählen, und zwar proportional zu derselben als  $j$  noch zur Auswahl stand. Was ist der Zusammenhang zum Axiom "Independence from Irrelevant Alternatives"?

4) Nehmen Sie an, dass die wahrgenommenen Nutzen der Alternativen  $i$  von  $w_i$  auf  $\bar{w}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , sich ändern. Leiten Sie eine Formel für neue Wahrscheinlichkeiten her, die nur von alten Wahrscheinlichkeiten und der Nutzendifferenzen  $\Delta w_i := \bar{w}_i - w_i$  abhängen. Interpretieren Sie die Formel im Bezug auf die Abhängigkeit vom Parameter  $\mu$ .