

Solow-Modell

Das *Solow-Modell* dient in der Makroökonomie zur Analyse und Veranschaulichung des Wirtschaftswachstums. Es wurde von Robert Solow 1956 entwickelt. Er erhielt für seine Arbeiten über ökonomische Wachstumstheorien den Nobelpreis für Wirtschaftswissenschaften im Jahr 1987. Im Vordergrund seiner Untersuchungen stand die Frage:

Wird das langfristige Wirtschaftswachstum in einer Volkswirtschaft überwiegend durch den technischen Fortschritt oder den steigenden Einsatz von Kapital und Arbeit hervorgerufen?

Um diese Fragestellung zu bearbeiten, präsentieren wir im Folgenden das Solow-Modell. Es sei innerhalb einer Ökonomie die Ausbringungsmenge Y von zwei Produktionsfaktoren, Kapital K und Arbeit L , abhängig:

$$Y = T \cdot f(K, L).$$

Die Produktionsfunktion $f(K, L)$ gibt den Output an, der infolge der eingesetzten Faktoren K und L erreicht wird. Der Parameter T wird als *Technologieniveau* interpretiert. Für die Produktionsfunktion f nehmen wir konstante Skalenerträge an, d. h.

$$f(\tau \cdot K, \tau \cdot L) = \tau \cdot f(K, L) \quad \text{für } \tau > 0.$$

Wir definieren das *Pro-Kopf-Kapital*:

$$k = \frac{K}{L}.$$

Mit dessen Hilfe kann der *Pro-Kopf-Output* ausgedrückt werden:

$$\frac{Y}{L} = T \cdot \frac{f(K, L)}{L} = T \cdot f\left(\frac{K}{L}, \frac{L}{L}\right) = T \cdot f(k, 1).$$

Die zeitliche Veränderung des Kapitals K wird über die Sparquote $s \in [0, 1]$ gesteuert:

$$K' = s \cdot Y.$$

In jeder Periode spart die Volkswirtschaft einen Teil ihres Pro-Kopf-Outputs, der als Kapital weiter genutzt wird. Der Faktor Arbeit wächst mit der konstanten Rate $\lambda > 0$:

$$L' = \lambda \cdot L.$$

Die wachsende Arbeiterschaft muss mit immer mehr Kapital ausgestattet werden, um das Pro-Kopf-Kapital konstant zu halten. Wir leiten nun die Dynamik für das Pro-Kopf-Kapital her. Das Differenzieren bzgl. der Zeit t ergibt:

$$k' = \left(\frac{K}{L}\right)' = \frac{K' \cdot L - K \cdot L'}{L^2} = \frac{s \cdot Y \cdot L - K \cdot \lambda \cdot L}{L^2} = s \cdot \frac{Y}{L} - \lambda \cdot \frac{K}{L}.$$

Als Erstes steht hier der Sparanteil des Pro-Kopf-Outputs, welcher in Form von Investitionen der Produktion zugute kommt. Der zweite Term verlangsamt das Wachstum des Pro-Kopf-Kapitals, da das Kapital unter immer mehr Arbeitern verteilt wird. Die Veränderung des Pro-Kopf-Kapitals ergibt sich also aus den *Pro-Kopf-Investitionen* abzüglich der *Pro-Kopf-Abschreibungen*:

$$k' = s \cdot T \cdot f(k, 1) - \lambda \cdot k.$$

Wir wollen die langfristige Entwicklung des Pro-Kopf-Kapitals $k(t)$ gemäß der hergeleiteten Differentialgleichung studieren, wofür der mathematische Begriff eines Gleichgewichts entscheidend sein wird. Das sind die Nullstellen ihrer rechten Seite. Wir untersuchen Gleichgewichte der oben hergeleiteten Differentialgleichung für das Pro-Kopf-Kapital auf Stabilität. Um dafür die Eindeutigkeit zu garantieren, setzen wir das Grenzprodukt der Produktionsfunktion $f(k, 1)$ bzgl. des Pro-Kopf-Kapitals k als positiv und abnehmend voraus, d. h.

$$f'(k, 1) > 0, \quad f''(k, 1) < 0.$$

Mit wachsendem Pro-Kopf-Kapital k steigt tendenziell auch der Pro-Kopf-Output $T \cdot f(k, 1)$. Möchte man den Pro-Kopf-Output $T \cdot f(k, 1)$ um eine Einheit steigern, muss man bei relativ hohem Pro-Kopf-Kapital k verhältnismässig viel davon der Produktion zusätzlich zuführen. Mathematisch bedeuten diese Annahmen, dass die Produktionsfunktion $f(k, 1)$ monoton steigend und konkav ist. Deswegen gibt es nur ein positives Gleichgewicht \bar{k} , wenn überhaupt. Dafür gilt:

$$s \cdot T \cdot f(\bar{k}, 1) - \lambda \cdot \bar{k} = 0.$$

Grafisch ist \bar{k} der eindeutige Schnittpunkt der Kurve von Pro-Kopf-Investitionen $s \cdot T \cdot f(k, 1)$ und der Geraden von Pro-Kopf-Abschreibungen $\lambda \cdot k$, siehe Abbildung 1. Man liest daraus sofort ab, dass die Kurve $s \cdot T \cdot f(k, 1)$ im Punkt \bar{k} flacher

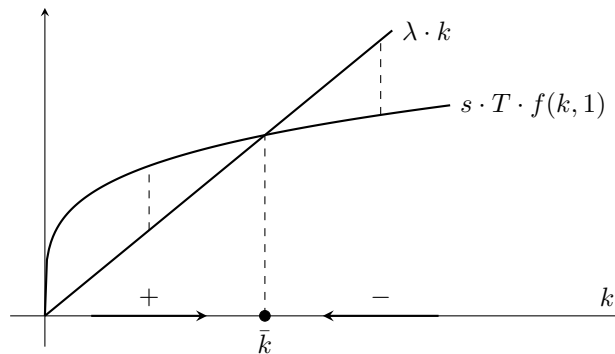


Figure 1: Solow-Modell

als die Gerade $\lambda \cdot k$ ist. Daher ist die Ableitung der rechten Seite ausgewertet im Punkt \bar{k} negativ:

$$s \cdot T \cdot f'(\bar{k}, 1) - \lambda < 0.$$

Dies beweist, dass das Gleichgewicht \bar{k} asymptotisch stabil ist. Welches Pro-Kopf-Kapital auch immer eine Ökonomie im Moment aufweist, strebt es mit der Zeit das Gleichgewicht \bar{k} an:

$$\begin{aligned} k < \bar{k} &\Rightarrow s \cdot T \cdot f(k, 1) > \lambda \cdot k \Rightarrow k' = s \cdot T \cdot f(k, 1) - \lambda \cdot k > 0 \Rightarrow k(t) \text{ wächst,} \\ k > \bar{k} &\Rightarrow s \cdot T \cdot f(k, 1) < \lambda \cdot k \Rightarrow k' = s \cdot T \cdot f(k, 1) - \lambda \cdot k < 0 \Rightarrow k(t) \text{ fällt.} \end{aligned}$$

Wir diskutieren explizit den Fall der *Cobb-Douglas-Produktionsfunktion*:

$$f(K, L) = K^\alpha \cdot L^{1-\alpha}.$$

Der Parameter $\alpha \in (0, 1)$ gibt die *Kapitalintensität* der Produktion an. Das ist die partielle Elastizität der Produktion bzgl. des Kapitals:

$$\varepsilon_f^K = \frac{\partial f(K, L)}{\partial K} \cdot \frac{K}{f(K, L)} = \alpha \cdot K^{\alpha-1} \cdot L^{1-\alpha} \cdot \frac{K}{K^\alpha \cdot L^{1-\alpha}} = \alpha.$$

Steigt der Kapitaleinsatz um 1%, so steigt auch die Produktion, aber lediglich um $\alpha\%$. Wir drücken die Cobb-Douglas-Produktionsfunktion in Termen des Pro-Kopf-Kapitals aus:

$$f(k, 1) = f\left(\frac{K}{L}, 1\right) = \left(\frac{K}{L}\right)^\alpha \cdot 1^{1-\alpha} = k^\alpha.$$

Die Differentialgleichung für das Pro-Kopf-Kapital nimmt somit die folgende Gestalt an:

$$k' = s \cdot T \cdot k^\alpha - \lambda \cdot k.$$

Um deren Gleichgewichte zu finden, wird die rechte Seite gleich null gesetzt:

$$s \cdot T \cdot k^\alpha - \lambda \cdot k = 0.$$

Daraus ergibt sich das eindeutige Gleichgewicht:

$$\bar{k} = \left(\frac{s \cdot T}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Das asymptotisch stabile Gleichgewicht \bar{k} kann man zur Prognose des langfristigen Wachstums heranziehen. Dafür setzen wir dieses Pro-Kopf-Kapital in die Formel des Pro-Kopf-Outputs ein:

$$\frac{Y}{L} = T \cdot f(\bar{k}, 1) = T \cdot \bar{k}^\alpha = T \cdot \left(\frac{s \cdot T}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} = \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot T^{\frac{1}{1-\alpha}}.$$

Der Pro-Kopf-Output ist abhängig von der Sparquote s , der Wachstumsrate der Bevölkerung λ , dem Technologieniveau T und der Kapitalintensität der

Produktion α . Wir berechnen exemplarisch die partielle Elastizität des Pro-Kopf-Outputs bzgl. T :

$$\begin{aligned}\varepsilon_{Y/L}^T &= \frac{\partial(Y/L)}{\partial T} \cdot \frac{T}{Y/L} = \frac{\partial\left(\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot T^{\frac{1}{1-\alpha}}\right)}{\partial T} \cdot \frac{T}{\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot T^{\frac{1}{1-\alpha}}} \\ &= \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot \frac{1}{1-\alpha} \cdot T^{\frac{1}{1-\alpha}-1} \cdot \frac{T}{\left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}} \cdot T^{\frac{1}{1-\alpha}}} = \frac{1}{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Für das produzierende Gewerbe in den USA zwischen 1899 und 1922 betrug die Produktionselastizität des Kapitals etwa $\alpha = 14$. Sofern das Technologieniveau T um 1% stieg, wuchs der Pro-Kopf-Output um ca.

$$\frac{1}{1-\alpha} = \frac{1}{1-14} = \frac{4}{3} \%.$$

Im Zuge der fortschreitender Mechanisierung und Automatisierung nimmt die Kapitalintensität der Produktion zu, weswegen die partielle Elastizität des Pro-Kopf-Outputs explodiert, d. h.

$$\varepsilon_{Y/L}^T = \frac{1}{1-\alpha} \rightarrow \infty \quad \text{für } \alpha \rightarrow 1.$$

In diesem Fall, der für die Industrieländer charakteristisch ist, wird der technologische Fortschritt ein rasantes Wirtschaftswachstum hervorrufen. In der Tat bestätigte Robert Solow anhand von empirischen Daten, dass ein Großteil des amerikanischen Wirtschaftswachstums in der ersten Hälfte des 20. Jahrhunderts durch den technologischen Fortschritt vorangetrieben wurde und nur ein geringfügiger Teil durch den steigenden Einsatz von Kapital und Arbeit.