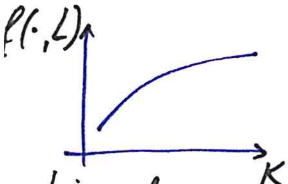
Wachstumsmodell nach Solow, 1956

Frage: Wie hängt ökonomisches Wachstum mit der Entwicklung von Kapital und Arbeit? (aus der Makroökonomie)

$$\underset{\text{Output}}{Q} = \underset{\text{Produktionsfunktion}}{f}(\underset{\text{Kapital}}{K}, \underset{\text{Arbeit}}{L})$$

Annahmen an f



steigend + konkav + homogen
(A1) (A2) (A3)

A1: $f_K, f_L > 0$ – positive Grenzprodukte bzgl. Arbeit und Kapital (partielle Ableitungen)

A2: $f_{KK}, f_{LL} < 0$ – abnehmende Grenzprodukte bzgl. Arbeit und Kapital

A3: $f(t\cdot K, t\cdot L) = t f(K,L)$ – konstante Skalenproduktion

$$Q = f(K,L) = f\left(L\cdot\frac{K}{L}, L\right) \underset{A_3}{=} L\cdot f\left(\underbrace{\frac{K}{L}}_{=:\kappa}, 1\right) =: L\cdot\varphi(\kappa)$$

κ: Kapital-Arbeits-Verhältnis

Eigenschaften von $\varphi(\kappa)$

- $[L\cdot\varphi(\kappa)]'_K = [f(K,L)]'_K \Leftrightarrow L\cdot\varphi'(\kappa) = f_K(K,L)\cdot\underbrace{\frac{\partial\kappa}{\partial K}}_{=\frac{1}{L}} \underset{K=\kappa\cdot L}{\Leftrightarrow} \varphi'(\kappa) = f_K(K,L) \underset{A1}{>} 0$

$\Downarrow$

- $f_{KK}(K,L) = \frac{\partial\varphi'(\kappa)}{\partial K} = \varphi''(\kappa)\cdot\frac{\partial\kappa}{\partial K} \underset{\kappa=\frac{K}{L}}{=} \frac{1}{L}\cdot\varphi''(\kappa) \Leftrightarrow \varphi''(\kappa) = L\cdot f_{KK}(K,L) \underset{A2}{<} 0$

$\Rightarrow \varphi(\kappa) = \frac{Q}{L}$ ist steigend und konkav

Dynamiken für Kapital und Arbeit:

1) $$\underset{\text{Kapitalzuwachs}}{\frac{dK}{dt}} = \underset{\text{Sparquote}}{s}\cdot Q$$ [konstanter Anteil von Q wird investiert]

2) $$\underset{\text{Arbeitszuwachs}}{\frac{dL}{dt}} = \lambda\cdot L$$ [Bevölkerung wächst exponentiell]

λ: Bevölkerungswachstumsrate > 0

Diskussion der Dynamiken

1) $\frac{dK}{dt} = s \cdot Q$

Sparrate ist exogen und zeitunabhängig.

2) $b(t)$ - Geburtenrate, $d(t)$ - Sterberate $\rightsquigarrow \frac{dL}{dt} = b(t) - c(t)$

konstant

$\underbrace{b(t) = c_1 \,,\, d(t) = c_2}$

Anfangspopul.

$\frac{dL}{dt} = c_1 - c_2 \Rightarrow L(t) = (c_1 - c_2)t + L_0$

lineares Wachstum

- $c_1 = c_2$ Stagnation
- $c_1 > c_2$ Wachstum
- $c_1 < c_2$ Schrumpfen ($\bar{t} = \frac{L_0}{c_2 - c_1}$ Aussterben).

linear

$b(t) = c_1 L(t) \,,\, d(t) = c_2 \cdot L(t)$

$\frac{dL}{dt} = \underbrace{(c_1 - c_2)}_{\lambda > 0} L(t) \Rightarrow L(t) = L_0 e^{(c_1 - c_2)}$

exponentielles Wachstum

- $c_1 = c_2$ Stagnation
- $c_1 > c_2$ Wachstum
- $c_1 < c_2$ Schrumpfen: $L(t) \to 0$ $(t \to \infty)$

$\frac{dL}{dt} = \lambda \cdot L \iff \frac{\dot{L}}{L} = \lambda$ "relatives Zuwachs ist konstant"

Modellanalyse

$\dot{K} = sQ = s \cdot L \cdot \varphi(k)$ und $K(t) = k(t) \cdot L(t)$

Ableiten nach t $\to$ $\dot{K} = \dot{k} \cdot L + k \cdot \dot{L} = \dot{k} \cdot L + k \cdot \lambda \cdot L$

$\dot{L} = \lambda L$

$\Rightarrow \quad s \cdot L \cdot \varphi(k) = \dot{k} \cdot L + k \lambda \cdot L$

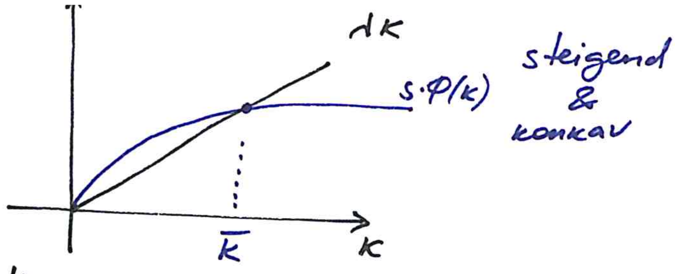
$\Rightarrow \quad \underbrace{\dot{k}}_{\text{Änderung des Pro-Kopf-Kapitals}} = \underbrace{s \cdot \varphi(k)}_{\text{Bruttoinvestition pro Kopf}} - \underbrace{\lambda k}_{\text{Abschreibung pro Kopf}}$ Gewöhnliche Differentialgleichung bzgl. k Kapital-Arbeits-Verhältnis

Gleichgewicht / Equilibrium / Stationärer Zustand:

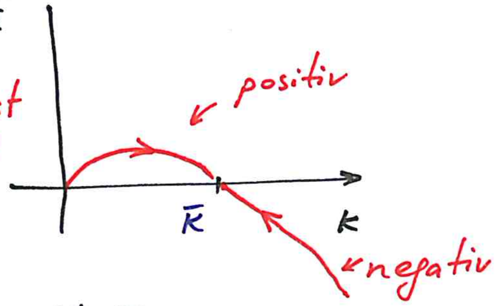
$\bar{k}$ so daß $s\,\varphi(\bar{k}) - \lambda \bar{k} = 0$ "Nullstelle der rechten Seite"

- $s\,\varphi(k) - \lambda k > 0 \Rightarrow \dot{k} > 0 \Rightarrow k$ wächst in t
- $s\,\varphi(k) - \lambda(k) < 0 \Rightarrow \dot{k} < 0 \Rightarrow k$ fällt in t
- $s\,\varphi(\bar{k}) - \lambda(\bar{k}) = 0 \Rightarrow \dot{k} = 0 \Rightarrow \bar{k}$ bleibt konstant in t und löst DGl als $k(t) := \bar{k} \;\; \forall t \geq 0$.

Gleichgewicht: $s\varphi(k) - \lambda k \doteq 0$



$s\varphi(k) - \lambda k$ = Abstand zwischen λk und $s\varphi(k)$ $= \dot k = \frac{dk}{dt}$



$k < \bar k \Rightarrow s\varphi(k) - \lambda k > 0 \Rightarrow \dot k > 0 \Rightarrow k$ wächst

$k > \bar k \Rightarrow s\varphi(k) - \lambda k < 0 \Rightarrow \dot k < 0 \Rightarrow k$ fällt

$\bar k$ – stabiles Gleichgewicht

Konsequenzen:

- $K(t) = \bar k \cdot L(t)$, da $k(t) = \bar k$

  $\dot K(t) = \bar k \cdot \dot L(t) = \bar k \cdot \lambda \cdot L(t) = \bar k \cdot \lambda \cdot \frac{K(t)}{\bar k} = \lambda \cdot K(t)$

  Kapital wächst mit derselben Rate λ.

- $sQ(t) \underset{s.o.}{=} L(t) \cdot s \cdot \varphi(\bar k) = L(t) \cdot \lambda \cdot \bar k = \lambda \cdot K(t)$

  $s\dot Q(t) = \lambda \dot K(t) \underset{1)}{=} \lambda \cdot s \cdot Q(t) \Rightarrow \dot Q(t) = \lambda \cdot Q(t)$

  Output wächst mit derselben Rate λ.

Beispiel: $Q = K^\alpha \cdot L^{1-\alpha} = L\left(\frac{K}{L}\right)^\alpha = L \cdot \underbrace{k^\alpha}_{=\varphi(k)}$

$\dot k = s \cdot k^\alpha - \lambda \cdot k$ – Bernoulli-DGl. u Ü

Gleichgewicht:

$s\varphi(k) - \lambda k \stackrel{!}{=} 0 \Leftrightarrow s k^\alpha - \lambda k = 0 \Leftrightarrow \bar k = \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$

$\frac{K(t)}{L(t)} = \bar k = \left(\frac{s}{\lambda}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$ $\Rightarrow$ $s \gg \lambda$ – mehr Kapital nötig

$s \ll \lambda$ – mehr Arbeit nötig.

↑ Kapital-Arbeits-Verhältnis im Gleichgewicht