Risikodiversifikation

$$r^i : \underbrace{r_1^i, \dots, r_{n_i}^i}_{\text{Messdaten zur i-ten Rendite}} , \quad n_i \in \mathbb{N} , \quad i = 1, \dots, I$$

r^i: Rendite des i-ten Assets

n_i: Anzahl von Messdaten der i-ten Rendite

I: Anzahl von Assets

$$\mu^i := E(r^i) = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} r_k^i$$ – Erwartungswert der i-ten Rendite

$$(\sigma^i)^2 := Var(r^i) = E\left((r^i - E(r^i))^2\right) = \frac{1}{n_i} \sum_{k=1}^{n_i} (r^i - \mu^i)^2$$

σ^i: Standardabweichung

– Varianz der i-ten Rendite

Betrachte $r(x) := \sum_{i=1}^{I} x_i \cdot r^i$, wobei $x_1 + \dots + x_I = 1$ ← Kapital

$r(x)$: Gesamtrendite

x_i: Anteil der i-ten Rendite

$x_1, \dots, x_I$: Portfolio

$x_i > 0$ "kaufen"

$x_i < 0$ "verkaufen"

Mittelwert von $r(x)$:

$$\mu(x) = E(r(x)) \underset{\text{Linearität}}{=} E\left(\sum_{i=1}^{I} x_i \cdot r^i\right) = \sum_{i=1}^{I} x_i \cdot E(r^i) = \sum_{i=1}^{I} x_i \cdot \mu^i$$

Varianz von $r(x)$:

$$\sigma^2(x) = Var(r(x)) = E\left((r(x) - E(r(x)))^2\right) = E\left(\left(\sum_{i=1}^{I} x_i \cdot r^i - \sum_{i=1}^{I} x_i \cdot \mu^i\right)^2\right) =$$

$$= E\left(\left(\sum_{i=1}^{I} x_i (r^i - \mu^i)\right)^2\right) = E\left(\left[\sum_{i=1}^{I} x_i (r^i - \mu^i)\right] \cdot \left[\sum_{j=1}^{I} x_j (r^j - \mu^j)\right]\right)$$

$$= E\left(\sum_{i,j=1}^{I} x_i \cdot x_j (r^i - \mu^i)(r^j - \mu^j)\right) = \sum_{i,j=1}^{I} x_i \cdot x_j \underbrace{E\left((r^i - \mu^i) \cdot (r^j - \mu^j)\right)}_{=: \sigma_{ij}}$$

Kovarianz von r_i und r_j

$$= x^T \cdot \Sigma \cdot x, \text{ wobei}$$

$\Sigma = (\sigma_{ij})$ – Kovarianzmatrix

Kovarianzmatrix

$$\Sigma = (\sigma_{ij}) \in \mathbb{R}^{I \times I} \quad - \; (I \times I)\text{-Matrix}$$

- $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$, d.h. $\Sigma^T = \Sigma$ symmetrisch
- $\sigma_{ii} = (\sigma^i)^2$ - Varianz von r^i.
- $x^T \cdot \Sigma \cdot x = \sigma^2(x) \geq 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^I$, d.h. Σ ist positiv semidefinit

Interpretation: $\sigma_{ij} = E\left((r^i - \mu^i)(r^j - \mu^j)\right)$

> 0

monotoner Zusammenhang zwischen r^i und r^j, d.h. hohe Werte von r^i gehen mit hohen Werten von r^j einher.

$r^i > \mu^i$ & $r^j > \mu^j$ (hohe Werte)

oder

$r^i < \mu^i$ & $r^j < \mu^j$ (niedrige Werte)

< 0

gegenseitiger Zusammenhang zwischen r^i und r^j, d.h. hohe Werte von r^i gehen mit niedrigen Werten von r^j einher.

$r^i > \mu^i$ & $r^j < \mu^j$ (hohe und niedrige Werte)

oder

$r^i < \mu^i$ & $r^j > \mu^j$

- $|\sigma_{ij}| \leq \sigma_i \cdot \sigma_j$ (Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung)

$$\rho_{ij} := \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i \cdot \sigma_j} \in [-1, 1] \quad - \text{Korrelationskoeffizient}$$

≈ -1 negativ korreliert

≈ 0 unkorreliert

≈ 1 positiv korreliert

Diversifikation

möglichst viele negativ korrelierte Assets haben

Diversifikationseffekt

$$\sigma^2(x) = \sum_{i,j=1}^{I} x_i \cdot x_j \cdot \sigma_{ij} \underset{\text{s.o.}}{\leq} \sum_{i,j=1}^{I} |x_i| \cdot |x_j| \cdot \sigma_i \cdot \sigma_j = \left(\sum_{i=1}^{I} |x_i| \cdot \sigma_i\right) \cdot \left(\sum_{j=1}^{I} |x_j| \cdot \sigma_j\right)$$

$$= \left[\sum_{i=1}^{I} |x_i| \cdot \sigma_i\right]^2 \Rightarrow \underbrace{\sigma(x)}_{\text{Risiko des Portfolios}} \leq \sum_{i=1}^{I} |x_i| \cdot \underbrace{\sigma_i}_{\text{Risiko der i-ten Rendite}}$$

Fazit: Risiko sinkt bei der Portfoliobildung, da manche Assets negativ korreliert sind, d.h. $\sigma_{ij} < 0$.

Beispiel:

	Gesamtrendite $r = \frac{r^1 + r^2}{2}$	Tankstellen r^1	Energiekontern r^2
Ölpreis ↑	1	4	-2
Ölpreis ≈	0	2	-2
Ölpreis ↓	2	-4	8

$$E(r^1) = \frac{1}{3}(4+2-4) = 2/3, \quad Var(r^1) = \frac{1}{3}\left(\left(4-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(2-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(-4-2/3\right)^2\right) = \frac{104}{9}$$

$$E(r^2) = \frac{1}{3}(-2-2+8) = 4/3, \quad Var(r^2) = \frac{1}{3}\left(\left(-2-4/3\right)^2 + \left(-2-4/3\right)^2 + \left(8-4/3\right)^2\right) = \frac{200}{9}$$

$$E(r) = \frac{1}{3}(1+0+2) = 1, \quad Var(r) = \frac{1}{3}\left((1-1)^2 + (0-1)^2 + (2-1)^2\right) = \frac{6}{9}.$$

$$\sigma_{12} = \mathbb{E}\left((r^1 - 2/3)(r^2 - 4/3)\right) = \frac{1}{3}\left((4-2/3)(-2-\frac{4}{3}) + (2-2/3)\cdot(-2-\frac{4}{3}) + \right.$$

$$\left. + (-4-2/3)(8-\frac{4}{3})\right) = -\frac{140}{3}$$

$$\rho_{12} = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1 \cdot \sigma_2} = \frac{-140/3}{\frac{\sqrt{104}}{3} \cdot \frac{\sqrt{200}}{3}} \hat{=} -0.9707\ldots$$ negativ korreliert

$$\Rightarrow \quad \underbrace{\sigma = \frac{\sqrt{6}}{3}}_{\approx 0.82} < \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{104}}{9} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{200}}{9}}_{\approx 1.35}$$

Cauchy-Schwarz'sche Ungleichung

$$|\sigma_{ij}| \leq \sigma_i \cdot \sigma_j$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\left|E\Big(\underbrace{(r^i - E(r^i))}_{X}\underbrace{(r^j - E(r^j))}_{Y}\Big)\right| \leq \sqrt{E\Big(\underbrace{(r^i - E(r^i))}_{X}{}^2\Big) \cdot E\Big(\underbrace{(r^j - E(r^j))}_{Y}{}^2\Big)}$$

Zeige: $|E(X \cdot Y)| \leq \sqrt{E(X^2) \cdot E(Y^2)}$.

Dafür berechne

$$0 \leq E\big((\underbrace{a}_{\in \mathbb{R}} \cdot X + Y)^2\big) = E\big(a^2 X^2 + 2a \cdot X \cdot Y + Y^2\big) =$$

$$\underbrace{= a^2 E(X^2) + 2 \cdot a \; E(X \cdot Y) + E(Y^2)}_{\text{minimiere bzgl. } a \in \mathbb{R}}$$

$$0 = (\ldots)' = 2a \cdot E(X^2) + 2\, E(X \cdot Y) \Rightarrow a^* = -\frac{E(X \cdot Y)}{E(X^2)}$$

$$\xrightarrow[a^* \text{ einsetzen}]{} 0 \leq \left(-\frac{E(X \cdot Y)}{E(X^2)}\right)^2 \cdot E(X^2) + 2\left(-\frac{E(X \cdot Y)}{E(X^2)}\right) \cdot E(X \cdot Y) + E(Y^2)$$

$$0 \leq \frac{E(X \cdot Y)^2}{E(X^2)} - 2\,\frac{E(X \cdot Y)^2}{E(X^2)} + E(Y^2)$$

$$0 \leq -\frac{E(X \cdot Y)^2}{E(X^2)} + E(Y^2)$$

$$0 \leq -E(X \cdot Y)^2 + E(X^2) \cdot E(Y^2)$$

$$|E(X \cdot Y)| \leq \sqrt{E(X^2)} \cdot \sqrt{E(Y^2)}.$$