Einkommensungleichheit

Frage: wie fasst man die Einkommensungleichheit einer Bevölkerung kenntlich zusammen?

Daten $\xrightarrow[\text{Statistik}]{}$ Index $\left.\right\}$ • Relation • Durchschnitt

Messung: $x_1 \leq x_2 \leq \ldots \leq x_n \leq \ldots \leq x_N$

x_n: Laufindex; N: Größe der Population

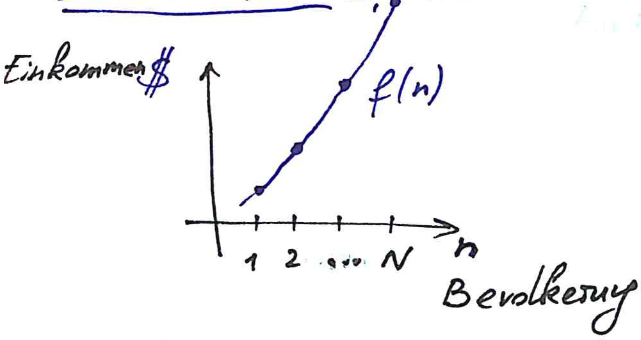
Pen's Parade, 1971 der Einkommen (aufsteigend sortiert)

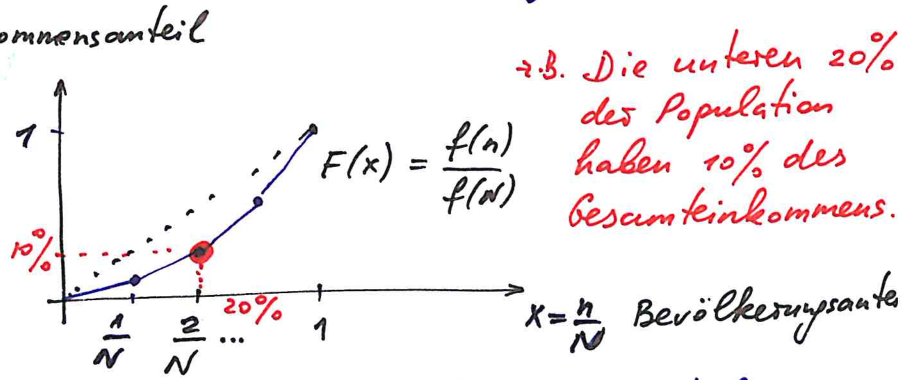
$f(n) := \sum_{i=1}^{n} x_i$ - Gesamteinkommen der n Ärmsten.

$x = \frac{n}{N}$ - der relative Anteil der n ärmsten an der Gesamtpopulation

$F(x) := \frac{f(n)}{f(N)}$, wobei $n = N \cdot x$ - Anteil am Gesamteinkommen der Population, den die (anteilig) x Ärmsten haben

Lorenz-Kurve, 1905



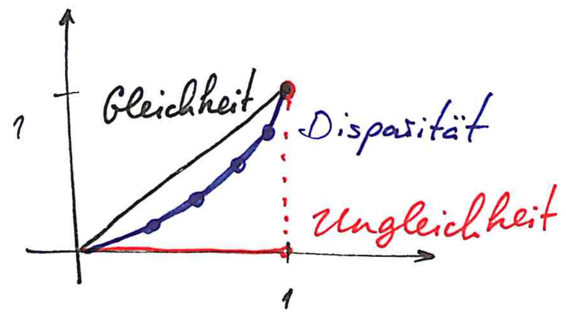


Falls $x_1 = x_2 = \ldots = x_N$, ist $F(x) = x$ - perfekte Gleichverteilungsgerade

Ansonsten zeigt die Lorenz-Kurve - Disparitäten/Ungleichheiten

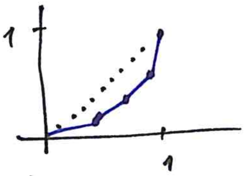
Falls $x_1 = x_2 = \ldots = x_{N-1} = 0$, $x_N = f(N)$, - perfekte Ungleichverteilung

ist $F(x) = \begin{cases} 0, & x < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

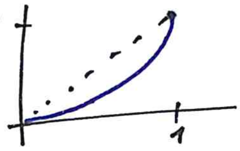


Equity-Faktor (Gerechtigkeit / Fairness)

$F: [0,1] \longrightarrow [0,1]$ – Lorenz-Kurve, d.h. $F(x)$ – Anteil am Gesamteinkommen der Population, den die anteilig x Ärmsten haben.



$\xrightarrow{N \to \infty}$
Grenzwert



diskrete Einkommensverteilung
$\Downarrow$
stückweise-lineare Lorenz-Kurve

stetige Einkommensverteilung
$\Downarrow$
glatte/differenzierbare Lorenz-Kurve

Anteil eines jeden wird marginal

$\Delta x := \frac{1}{N}, x = \frac{n}{N}$

$$f(n+1) - f(n) = \frac{f(N)}{N} \cdot \frac{F\left(\frac{n+1}{N}\right) - F\left(\frac{n}{N}\right)}{\frac{1}{N}} = \frac{f(N)}{N} \cdot \underbrace{\frac{F(x+\Delta x) - F(x)}{\Delta x}}_{\xrightarrow{\Delta x \to 0} F'(x)}$$

(falls $N \to \infty$)

$$f(n+1) - f(n) = \frac{f(N)}{N} \cdot F'(x)$$

Außerdem:

$$\frac{f(N) - f(n)}{N-n} = \frac{f(N)}{N} \cdot \frac{1-F(x)}{1-x}$$

$$\varepsilon(x) := \underbrace{\left[f(n+1) - f(n)\right]}_{\text{Einkommen des Individuums } n} \underbrace{\frac{1}{f(N)-f(n) / N-n}}_{\text{Durchschnittseinkommen aller derjenigen, die wenigstens so reich sind wie Individuum } n} = F'(x) \cdot \frac{1-x}{1-F(x)}.$$

Equity-Faktor des Individuums $n = x \cdot N$

z.B. $x = 0.5 \Rightarrow n = \frac{N}{2}$ Hälf

Annahme an $\varepsilon(x)$:

$\varepsilon(x) = \varepsilon$ – konstant: Prinzip der Selbstähnlichkeit, d.h. der Ärmste in der Gruppe hat ein Einkommen, das ein Bruchteil ε des Durchschnittseinkommens ist, u.s.w.

Löse $\underbrace{F'(x) \frac{1-x}{1-F(x)} = \varepsilon}_{\text{Gewöhnliche Differentialgleichung}}$ bzgl. $F(\cdot) \longrightarrow \int \frac{F'(x)}{1-F(x)} = \int \frac{\varepsilon}{1-x} \iff \ln(1-F(x)) = \varepsilon \ln(1-$

Integrieren

$\iff 1 - F(x) = (1-x)^{\varepsilon}$

$$F(x) = 1 - (1-x)^{\varepsilon}$$

$\xrightarrow{\varepsilon = 1} F(x) = x$ Gleichheit

$\xrightarrow{\varepsilon \downarrow 0} F(x) \to$ Ungleichheit

fraktale Lorenz-Kurve

Chaostheorie

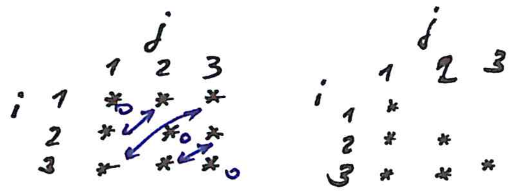
- Mandelbrot-Menge
- Blumenkohl
- Küstenlinie etc.

Gini-Index, 1912

$x_1 \le x_2 \le \dots \le x_N$ – Einkommensverteilung

$$G := \underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{Skalierung}} \cdot \frac{\frac{1}{N^2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}|x_i - x_j|}{\underbrace{\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} x_i}_{\text{Durchschnittseinkommen}}}$$

← Durchschnittsdifferenz der Einkommen "Streuungsmaß"



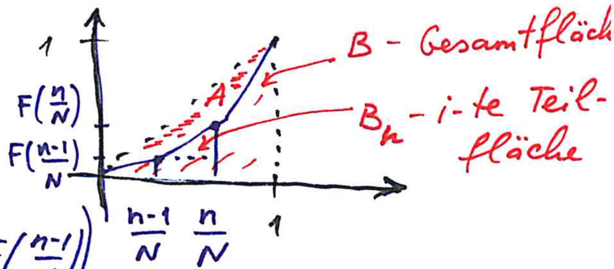
Es gilt: $\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}|x_i - x_j| = \sum_{j=1}^{N}\sum_{i=j}^{N}(x_i - x_j) =$

$= \sum_{i=1}^{N} i \cdot x_i - \sum_{i=1}^{N}(N+1-i)\,x_i = 2\sum_{i=1}^{N} i\,x_i - (N+1)\sum_{i=1}^{N} x_i$

j	i	
1	$x_1 \dots x_N$	$-(N-1)\,x_1$
2	$x_2 \dots x_N$	$-(N-2)\,x_2$
⋮	…	
N	x_N	$-\; x_N$

$$\Rightarrow \quad G = \frac{2\sum_{i=1}^{N} i \cdot x_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i} - \frac{N+1}{N}$$

Zusammenhang mit Lorenz-Kurve:



$$B_n = \left(\frac{n}{N} - \frac{n-1}{N}\right)F\left(\frac{n-1}{N}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{N} - \frac{n-1}{N}\right)\cdot\left(F\left(\frac{n}{N}\right) - F\left(\frac{n-1}{N}\right)\right)$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{N}\left(F\left(\frac{n}{N}\right) + F\left(\frac{n-1}{N}\right)\right) = \frac{1}{2N}\cdot\left(\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{i=1}^{n-1} x_i}{\sum^{N} x_i}\right) = \frac{1}{N}\left(\frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i + \frac{1}{2}x_n}{\sum_{i=1}^{N} x_i}\right)$$

$$B = \sum_{n=1}^{N} B_n = \frac{1}{N\sum_{i=1}^{N} x_i}\left(\sum_{n=1}^{N}\sum_{i=1}^{n-1} x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} x_i\right) = \frac{1}{N\sum_{i=1}^{N} x_i}\left(\sum_{i=1}^{N}(N-i)\,x_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} x_i\right)$$

$$\underbrace{\frac{A}{A+B}}_{} = 2A = 1 - 2B = 1 - \frac{2\sum_{i=1}^{N}(N-i)\,x_i + \sum_{i=1}^{N} x_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i} = \underbrace{\frac{2\sum_{i=1}^{N} i\,x_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i} - \frac{N+1}{N}}_{}$$

$A+B = \frac{1}{2}$

Fläche zwischen Lorenz-Kurve und Gleichverteilungsgerade $\longleftrightarrow$ Integral!

$= G$ – Gini-Index

z.B. $F(x) = 1-(1-x)^{\varepsilon}$ fraktale Lorenz-Kurve

$$G = 1 - 2\int_0^1 F(x)\,dx = 1 - 2\int_0^1\left(1-(1-x)^{\varepsilon}\right)dx = 1 - 2\left(x + \frac{1}{\varepsilon+1}(1-x)^{\varepsilon+1}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= 1 - 2\left(1 + \frac{1}{\varepsilon+1}(1-1)^{\varepsilon+1} - 0 + \frac{1}{\varepsilon+1}(1-0)^{\varepsilon+1}\right) = 1 - 2\left(1 - \frac{1}{\varepsilon+1}\right) =$$

$$= 1 - 2\,\frac{\varepsilon}{\varepsilon+1} = \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}$$

$\xrightarrow{\varepsilon \to 0} G \to 1$

$\xrightarrow{\varepsilon = 1} G = 0$

$\longrightarrow$ Ungleichheit $G = 1$ … Gleichheit $G = 0$