Konsumverhalten

Frage: ist Konsumverhalten rational, d.h. untersteht es dem Prinzip der Optimalität?

Güterbündel

Nutzen $u(x): \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$

ordinal

- Konsumentscheidung hängt nur von der Ordnung / dem Vergleich des Nutzens bei Alternativen ab

$$\underbrace{u(\bar{x}) > u(x)}_{\text{relevante Ordnung}}$$

- Konsumentscheidung ist invariant bzgl. monotoner Nutzentransformation T: selbe Entscheidung

$$u(\bar{x}) > u(x) \Leftrightarrow Tu(\bar{x}) > Tu(x)$$

Modell der Nutzenmaximierung

cardinal

- Konsumentscheidung hängt auch von der Größe / Ausprägung des Nutzens bei Alternativen ab

$$\underbrace{u(\bar{x}) - u(x)}_{\text{relevante Größe}}$$

- Konsumentscheidung ist nicht unbedingt invariant bzgl. monotoner Nutzentransformation T: verschiedene Entscheidungen

$$u(\bar{x}) > u(x) \not\Leftrightarrow Tu(\bar{x}) > Tu(x)$$

Modell der logarithmischen Profitmaximierung

Güterbündel, Preise $\in \mathbb{R}_+^n$, Budget $\in \mathbb{R}_+$

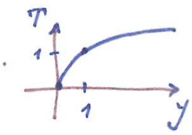
$$\max_{x \geq 0} \underbrace{u(x)}_{\text{Nutzen}} \quad \text{s.t.} \quad \underbrace{p^T x \leq w}_{\text{Budgetrestriktion}}$$

Preise $\in \mathbb{R}_+^n$

$$\max_{x \geq 0} \underbrace{w \cdot \log u(x)}_{\text{log. Nutzen}} - \underbrace{p^T \cdot x}_{\text{Ausgaben}}$$

z.B. $u(x) = x \in \mathbb{R}^1$ - linear, $p, w > 0$

$T(y) = \sqrt{y}$ - monotone Transformation, d.h. $T(\bar{y}) > T(y) \quad \forall \bar{y} > y$.



(i) $\max_{x \geq 0} x$ s.t. $p \cdot x \leq w$ $\Rightarrow$ $\bar{x} = \frac{w}{p}$ optimal & $p \cdot \bar{x} = w$ Budget ausgeschöpft "Walras Law"

$\max_{x \geq 0} \sqrt{x}$ s.t. $p \cdot x \leq w$ $\Rightarrow$

(ii) $\max_{x \geq 0} w \cdot \log x - p \cdot x \Rightarrow \bar{x} = \frac{w}{p}$ - Lösung aus (i)

$\frac{w}{x} - p \overset{!}{=} 0$

$\max_{x \geq 0} \underbrace{w \cdot \log \sqrt{x}}_{\frac{w}{2} \log x} - p \cdot x \Rightarrow \ldots \quad \bar{x} = \frac{w/2}{p}$ & $p \cdot \bar{x} = \frac{w}{2} < w$ Budget nicht vollständig ausgeschöpft, aber Budgetrestriktion besteht

Grenznutzen wichtig!

Logarithmische Profitmaximierung

(**) $$\max_{x \geq 0} \; w \cdot \log u(x) - p^T \cdot x$$

$x = t \cdot y$

$\Longleftrightarrow$

$$\max_{y \geq 0} \; \max_{t \geq 0} \; \underbrace{w \cdot \log u(t \cdot y) - p^T (t \cdot y)}_{w \cdot \log t^\alpha \cdot u(y) - t \cdot p^T y \,=\, \alpha w \log t + w \log u(y) - t \cdot p^T y}$$

Optimalität bzgl. t $(\ldots)'_t = 0!$: $\quad \dfrac{\alpha \cdot w}{t} - p^T y = 0 \Rightarrow t = \dfrac{\alpha \cdot w}{p^T y}$ (*)

einsetzen

$$\max_{y \geq 0} \; \alpha \cdot w \cdot \log \frac{\alpha \cdot w}{p^T y} + w \log u(y) - \frac{\alpha \cdot w}{\cancel{p^T y}} \cdot \cancel{p^T y} =$$

$$= \underbrace{\alpha \cdot w \log \alpha \cdot w} - \alpha \cdot w \log p^T y + w \log u(y) - \underbrace{\alpha \cdot w}$$

von x unabhängig

$$\Longleftrightarrow \max_{y \geq 0} \; w \log u(y) - \alpha \cdot w \log p^T y$$

$$\Longleftrightarrow \max_{y \geq 0} \; w \log \frac{u(y)}{(p^T y)^\alpha} \quad \overset{\text{log-monoton}}{\Longleftrightarrow} \quad \max_{y \geq 0} \; \frac{u(y)}{(p^T y)^\alpha}$$

homogen vom Grad 0, da $\dfrac{u(t \cdot x)}{(p^T t \cdot x)^\alpha} = \dfrac{\cancel{t^\alpha} \cdot u(x)}{\cancel{t^\alpha} \cdot p^T x} = \dfrac{u(x)}{p^T x}$

Ü

o.B.d.A. $p^T y = w$

$$\Longleftrightarrow \max_{y \geq 0} \; u(y) \quad \text{s.t. } p^T y = w$$

"Verteile w€ optimal für Konsum" $\longrightarrow \bar{y}$. Nutzenmaximierung!

(*) $\Rightarrow \bar{t} = \dfrac{\alpha \cdot \cancel{w}}{\cancel{p^T \bar{y}}} = \alpha$ (**) $\Rightarrow \bar{x} = \alpha \cdot \bar{y}$

Skalierung des Konsums

Insbesondere: $p^T \bar{x} = p^T (\alpha \cdot \bar{y}) = \alpha \cdot w$

Anteil des Budgets wird ausgegeben!

α-Homogene Funktionen

$$\underbrace{u(t\cdot x)}_{\text{Skalierung des Konsums}} = \underbrace{t^{\alpha}\cdot u(x)}_{\text{Skalierung des Nutzens}} \quad \forall t \geq 0$$

α ← Grad der Homogenität

- $\alpha > 1$ zunehmend
- $\alpha = 1$ konstant
- $\alpha < 1$ abnehmend

z. B. $u(x) = \underbrace{x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}}_{\text{Cobb-Douglas-Nutzenfunktion}}$ mit $\alpha_1,\ldots,\alpha_n > 0$

$$u(t\cdot x) = (t\cdot x_1)^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot(t\cdot x_n)^{\alpha_n} = t^{\overbrace{\alpha_1+\ldots+\alpha_n}^{=\alpha}}\cdot\overbrace{x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}}^{u(x)}$$

$$\underbrace{\frac{u(x+h_i)-u(x)}{u(x)}}_{\text{relative Nutzenänderung}} : \underbrace{\frac{h_i}{x_i}}_{\text{relative Mengenänderung}} = \underbrace{\frac{u(x+h_i)-u(x)}{h_i}}\cdot\frac{x_i}{u(x)}$$

$\rightarrow \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)$ für $h_i \to 0$
partielle Ableitung von u nach x_i

$$\Rightarrow \varepsilon_u^{(i)}(x) = \frac{\partial u}{\partial x_i}(x)\cdot\frac{x_i}{u(x)}$$

relative Nutzenänderung in % bei der Steigung des Gutes um 1%.

↑ i-te Elastizität

Hier: $\varepsilon_u^{(i)}(x) = \frac{\partial}{\partial x_i}\underbrace{\left(x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_i^{\alpha_i}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}\right)}_{=\alpha_i\cdot x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_i^{\alpha_i-1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}}\cdot\frac{x_i}{x_1^{\alpha_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\alpha_n}} = \alpha_i$

$$\Rightarrow \alpha = \alpha_1+\ldots+\alpha_n = \varepsilon_u^{(1)}(x)+\ldots+\varepsilon_u^{(n)}(x)$$

↑ Gesamtelastizität = relative Nutzenänderung in % bei der Steigung aller Güter um 1%

z. B. $u(x_1,x_2) = x_1^{1/2}\cdot x_2^{1/3}$

$\alpha = 1/2 + 1/3 = 5/6$ $\Rightarrow$ Steigung aller Güter um 1% bewirkt eine Nutzenänderung um 5/6%

↑ abnehmend.