# Oligopol

- Wettbewerb unter Produzenten führt zu niedrigen Preisen.

① $$\max_{y_k \geq 0} \ (p - c_k) \cdot y_k$$

$p$ ← Preis, $c_k$ ← Kosten, $y_k$ ← produzierte Gütermenge $\in \mathbb{R}$ "ein Gut"

$k$ ← $k$-ter Produzent

② Preisentwicklung: (Inverse Nachfragefunktion)

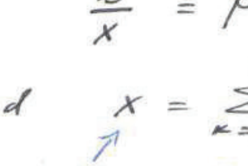
$$\underbrace{p = \frac{B}{\sum_{k=1}^{K} y_k}}_{\text{mittlerer Preis}} \quad \text{(B ← Budget der Konsumenten)} \qquad \text{oder} \qquad \underbrace{p = -\frac{\beta}{\alpha} \sum_{k=1}^{K} y_k + \beta.}_{\text{Cournot}}$$

$$\max_{x \geq 0} \ u(x) := \underbrace{B \cdot \ln x}_{\text{logarithmische Nutzenfunktion}} - \overbrace{p \cdot x}^{\text{Ausgaben}}$$

Optimalität: $u'(x) = 0$, d.h.

$$\frac{B}{x} = p$$

und $\underset{\text{Gesamtnachfrage}}{x} = \underset{\text{Gesamtangebot}}{\sum_{k=1}^{K} y_k}$



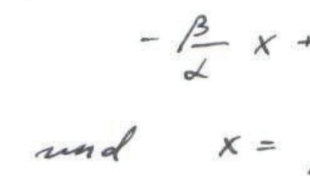

$$x = \frac{B}{p}$$

$$\max_{x \geq 0} \ u(x) := \underbrace{-\frac{\beta}{2\alpha} x^2 + \beta \cdot x}_{\text{quadratische Nutzenfunktion}} - \overbrace{p \cdot x}^{\text{Ausgabe}}$$

Optimalität: $u'(x) = 0$, d.h.

$$-\frac{\beta}{\alpha} x + \beta = p$$

und $x = \sum_{k=1}^{K} y_k$.




$$x = \alpha \left(1 - \frac{p}{\beta}\right)$$

$\alpha$ - maximale Nachfrage
$\beta$ - maximaler Preis

Gleichgewicht (Nash): $\boxed{(\bar{y}_k)_{k=1}^{K}, \text{ so daß } \bar{y}_k \text{ löst } P(\bar{y}_{-k})}$, wo

$$P(\bar{y}_{-k}): \max_{y_k \geq 0} \left( \frac{B}{\sum_{l \neq k} \bar{y}_l + y_k} - c_k \right) \cdot y_k \qquad \text{oder} \qquad P(\bar{y}_{-k}): \max_{y_k \geq 0} \left( -\frac{\beta}{\alpha} \cdot \sum_{k \neq l} \bar{y}_l + y_k + \beta \right) \cdot y_k$$

$\bar{y}_{-k} = (y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_K)$ ohne $y_k$!

# Mittlerer Preis

o. B. d. A. $\quad c_1 < \dots < c_K$

Sei $\quad c_k \le \bar{p} < c_{k+1}$ $\leftarrow$ Gleichgewichtspreis $\quad \Rightarrow \bar{y}_{k+1} = \dots \bar{y}_K = 0.$

Für $\quad l = 1, \dots, k: \quad \dfrac{B}{\sum_{l=1}^{k} y_l} - \dfrac{B y_l}{\left(\sum_{l=1}^{k} y_l\right)^2} - c_l = 0 \quad \underset{\sum_{l=1}^{k}}{\Rightarrow} \quad \overset{=\bar{p}}{\dfrac{B \cdot k}{\sum_{l=1}^{k} y_l}} - \dfrac{B \sum_{l=1}^{k} y_l}{\left(\sum_{l=1}^{k} y_l\right)^2} - \sum_{l=1}^{k} c_l = 0$

$$\Rightarrow \bar{p} = \frac{B}{\sum_{l=1}^{k} y_l} = \sum_{l=1}^{k} c_l \Big/ k-1$$ - Gleichgewichtspreis

$$\Rightarrow \bar{y}_l = \frac{B(k-1)}{\sum_{l=1}^{k} c_l} \underbrace{\left(1 - \frac{c_l(k-1)}{\sum_{l=1}^{k} c_l}\right)}_{\ge 0\ ?}$$ - Gleichgewicht, $l = 1, \dots, k$

Frage: sind $\bar{y}_l \ge 0$, $l = 1, \dots, k$ und für welches $k$ gilt

$$\overset{\text{ok}}{\Longleftarrow} \quad c_l < \dots \le c_k \underset{(*1)}{\le} \sum_{l=1}^{k} c_l \Big/ k-1 \underset{(*2)}{<} c_{k+1} \quad (*)$$

$$r_k := \sum_{l=1}^{k} c_l \Big/ c_k(k-1), \quad k = 2, \dots, K.$$

(a) $\quad r_k \ge 1 \Rightarrow r_{k+1} \le r_k$

$$\underbrace{c_k}_{\le c_{k+1}} \Big( \underbrace{k \sum_{l=1}^{k} c_l - (k-1) c_k}_{(k-1)\sum_{l=1}^{k} c_l + \underbrace{\sum_{l=1}^{k} c_l - (k-1) c_k}_{\ge 0,\ \text{da } r_k \ge 1}} \Big) \ge (k-1) c_k \cdot \sum_{l=1}^{k} c_l$$

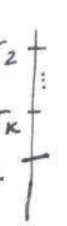
$\Downarrow$

Also:
$$c_{k+1} \Big( k \sum_{l=1}^{k} c_l - (k-1) c_k \Big) \ge (k-1) c_k \sum_{l=1}^{k} c_l \Leftrightarrow \overbrace{\frac{\sum_{l=1}^{k} c_l + c_{k+1}}{c_{k+1} \cdot k}}^{r_{k+1}} \le \overbrace{\frac{\sum_{l=1}^{k} c_l}{c_k(k-1)}}^{r_k}$$

(b) $\quad r_k < 1 \Rightarrow r_{k+1} < 1.$

$$\underline{\sum_{l=1}^{k+1} c_l} = \sum_{l=1}^{k} c_l + c_{k+1} \underset{r_k < 1}{<} (k-1) c_k + c_{k+1} \le (k-1) c_{k+1} = \underline{k\, c_{k+1}}.$$

Begründung zu $(*)$: $\quad r_2 = \dfrac{c_1 + c_2}{c_2} > 1 \quad$ und $\quad r_k$ fällt monoton bis 1 erreicht wird. $\Rightarrow \exists!\, k \in \{2, \dots, K\}: \underset{(*1)}{r_k \ge 1}, \ r_{k+1} < 1.$




Zu $(*2)$: angenommen $\underbrace{\sum_{l=1}^{k} c_l \Big/ k-1}_{\text{Preis}} > c_{k+1} \Rightarrow$ Produzent $k+1$ aktiv

$\Rightarrow$ Neuer Preis ist $\sum_{l=1}^{k+1} c_l \Big/ k < c_{k+1}$ (da $r_{k+1} < 1$)

$\Rightarrow$ Produzent $k+1$ nicht aktiv $\lightning$.

## Gleiche Kosten

$c_k = c \;,\; k=1,\dots,K. \quad \Rightarrow c = c_K \underset{\substack{\uparrow \\ \text{gilt immer}}}{\leq} \frac{\sum_{\ell=1}^{K} c_\ell}{K-1} = \frac{K}{K-1}\cdot c \Rightarrow$ alle Produzenten sind aktiv!

$$\bar{p} := \frac{\sum_{\ell=1}^{K} c_\ell}{K-1} = \frac{K}{K-1}\, c \underset{(K\to\infty)}{\longrightarrow} c$$

("Gleichgewichtspreis nähert sich den Kosten)

unendlich viele Produzenten

$$\bar{y}_k = \frac{\beta\,(K-1)}{K\cdot c}\left(1 - \frac{c\cdot(K-1)}{K\cdot c}\right) = \frac{\beta\,(K-1)}{K^2\cdot c} \underset{(K\to\infty)}{\longrightarrow} 0$$

(Umsatz nähert sich dem Null)

(Cournot-Oligopol → ähnliches Verhalten)

## Dynamik (Cournot-Modell)

$$\max_{y_k \geq 0} \underbrace{\left(-\frac{\beta}{\alpha}\sum_{\ell\neq k} y_\ell + y_k + \beta - c_k\right) y_k}_{\text{Profit}} \quad \xrightarrow[\text{nach } y_k]{\text{Ableiten}} \quad \underbrace{\left(-\frac{\beta}{\alpha}\sum_{\ell=1}^{K} y_\ell + \beta - c_k\right) - \frac{\beta}{\alpha} y_k}_{\text{Sensitivität}}$$

max. Preis

max. Nachfrage

Produktion

Interpretation: $\underset{\text{Preis}}{p} - \underset{\text{Kosten}}{c_k} - \frac{\beta}{\alpha} y_k$

"verdeckte Kosten" für Preisminderung gegen Wettbewerber

Produktionsänderung

Dynamik: $\quad \frac{dy_k}{dt} \simeq -\frac{\beta}{\alpha}\sum_{\ell=1}^{K} y_\ell + \beta - c_k - \frac{\beta}{\alpha} y_k \;,\; k=1,\dots,K.$