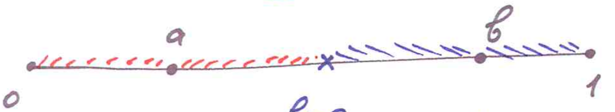
Lokationsspiele

Frage: warum führen strategische Lokationsentscheidungen zur höheren geographischen Konzentration der Firmen

Modell von Hotelling, 1929

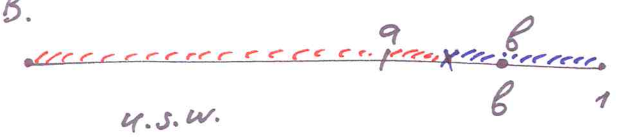
A - Anteil $= \frac{a+b}{2}$ B - Anteil $= 1 - \frac{a+b}{2}$



$a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2}$

Geschäfte A und B können sich verbessern, wenn jeweils andere Position festgesetzt wird

z.B.



u.s.w.

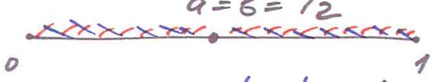
- Geschäft A - Position a
  Geschäft B - Position b
- Konsumenten sind gleichmäßig verteilt auf $[0,1]$, d.h. $x \in [0,1]$ repräsentiert einen Konsumenten
- Transportkosten ergeben sich für x als minimaler Abstand zu den Geschäften A und B.
- Geschäfte A und B maximieren ihren Marktanteil.

Nash-Gleichgewicht: Entscheidungspaar $(\bar{a}, \bar{b})$ so daß

- $\bar{b}$ - optimal für B, gegeben $\bar{a}$
- $\bar{a}$ - optimal für A, gegeben $\bar{b}$.

"kein Nutzengewinn beim einseitigen Variieren"
$\Downarrow$
stabiles Lösungskozept.

Hier: A-Anteil = B-Anteil = 1/2.
$\bar{a} = \bar{b} = 1/2$

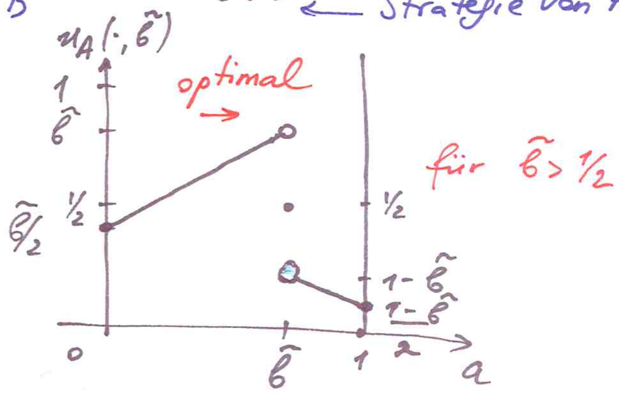


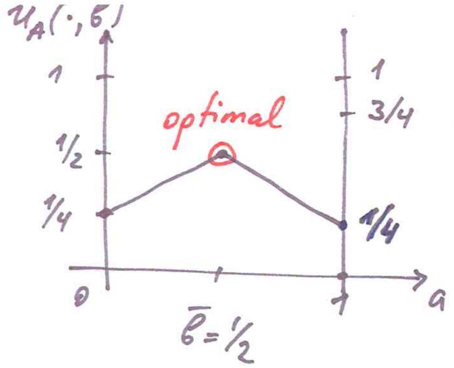
Konzentration!

formal: $\cdot\ \bar{b} \in \underset{b \in [0,1]}{\operatorname{argmax}}\ \overbrace{u_B(\bar{a}, b)}^{\text{Marktanteil von B}}$ ← Strategie von B $\quad \cdot\ \bar{a} \in \underset{a \in [0,1]}{\operatorname{argmax}}\ \overbrace{u_A(a, \bar{b})}^{\text{Marktanteil von A}}$ ← Strategie von A

$$u_A(a, \underset{\text{fest}}{b}) = \begin{cases} \frac{a+b}{2} & a < b \\ 1/2 & a = b \\ 1 - \frac{a+b}{2} & a > b \end{cases}$$

als Funktion von $a \in [0,1]$



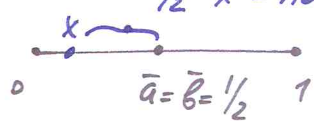


für $\bar{b} = \frac{1}{2}$.

Frage: sind Gesamttransportkosten minimal bei der Konzentration
(Wohlfahrtsanalyse)
(äquivalent: ist $(\bar{a} = \frac{1}{2}, \bar{b} = \frac{1}{2})$ Pareto optimal?)

$\bar{a} = \bar{b} = 1/2$

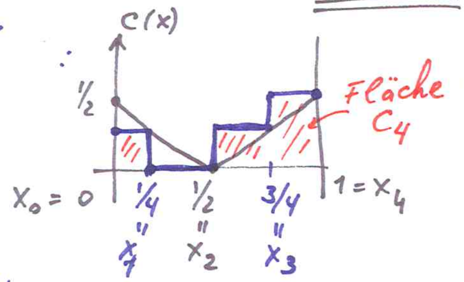
Transportkosten des Konsumenten $x \in [0,1]$



$$c(x) = \begin{cases} 1/2 - x, & \text{falls } x \le 1/2 \\ x - 1/2, & \text{falls } x \ge 1/2 \end{cases} \Rightarrow c(x) = \left|x - \tfrac{1}{2}\right| \leftarrow \text{Betrag.}$$

Wie definiert man Gesamttransportkosten? $\longrightarrow$ iterativ!

Schritt :
N=4



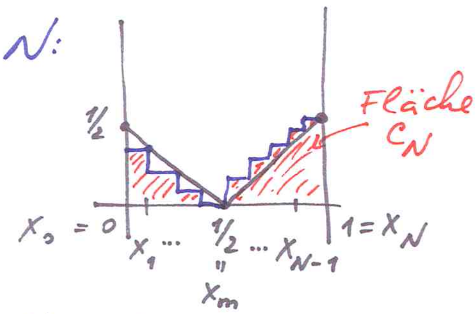
Alle Konsumenten im Intervall $[x_{i-1}, x_i]$ seien im Punkt x_i konzentriert $i = 0, \dots, 4$

$$C_4 = \sum_{i=1}^{4} \underbrace{c(x_i)}_{\substack{\text{Kosten} \\ \text{auf } [x_{i-1}, x_i]}} \cdot \underbrace{(x_i - x_{i-1})}_{\substack{\text{Anzahl von Konsumenten} \\ \text{im Intervall } [x_{i-1}, x_i]}}$$

Schrittweite zwischen x_i, x_{i-1} ist 1/4

⋮

Schritt N:



$$C_N = \sum_{i=1}^{N} c(x_i)(x_i - x_{i-1})$$

$\downarrow$ Grenzwert für $N \to \infty$
Schrittweite $1/N \to 0$

$$C = \int_{x=0}^{1} c(x)\,dx$$

Schrittweite zwischen x_i, x_{i-1} ist $1/N$

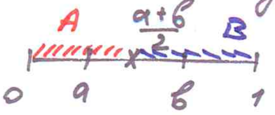
Gesamttransportkosten

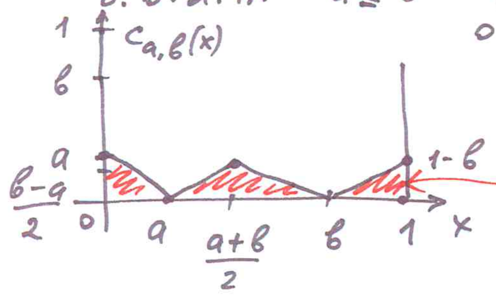
Integral von $c(\cdot)$ mit Grenzen 0 und 1.
"
Fläche unter dem Graphen von $c(\cdot)$.

$$\Rightarrow C = \underbrace{\int_0^1 c(x)dx}_{} = _{\text{Fläche}}\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}$$

Berechne Gesamtkosten abhängig von $a, b \longrightarrow$ $C(a,b)$

o.B.d.A. $a \leq b$





$$c_{a,b}(x) = \begin{cases} a-x, & x<a \\ x-a, & a<x<\frac{a+b}{2} \\ b-x, & \frac{a+b}{2}<x<b \\ x-b, & b<x<1 \end{cases}$$

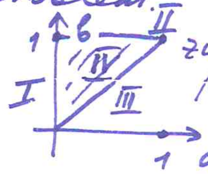
Fläche ist

$$C(a,b) = \int_0^1 c_{a,b}(x)\,dx$$

$$\Rightarrow C(a,b) = \frac{1}{2}\, a\cdot a + \frac{1}{2}\left(\frac{b-a}{2}\cdot\frac{b-a}{2}\right. + \frac{1}{2}\,\frac{b-a}{2}\cdot\frac{b-a}{2} + \frac{1}{2}(1-b)(1-b) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(a^2 + \frac{(b-a)^2}{2} + (1-b)^2\right).$$

Zentrale Planung: $\min\limits_{\substack{a,b\in[0,1]\\ a\leq b}} C(a,b)$ "Optimierungsproblem."



zulässige Menge

Fall I: $a=0,\ b\in[0,1]$; $C(a,b) = \frac{1}{2}\underbrace{\left(\frac{b^2}{2}+(1-b)^2\right)}$

f': $b - 2(1-b) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{a=0,\ b=\frac{2}{3}}$ $\frac{1}{6}$ $\boxed{a=0,\ b=0}$ $\frac{1}{2}$ $\boxed{a=0,\ b=1}$ $\frac{1}{4}$

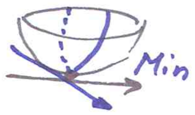
Fall II: $b=1,\ a\in[0,1]$, $C(a,1) = \frac{1}{2}\underbrace{\left(a^2+\frac{(1-a)^2}{2}\right)}$

f': $2a - (1-a) = 0 \Rightarrow$ $\boxed{a=\frac{1}{3},\ b=1}$ $\frac{1}{6}$ $\boxed{a=0,\ b=1}$ $\frac{1}{4}$ $\boxed{a=1,\ b=1}$ $\frac{1}{2}$

Fall III: $a=b,\ a\in[0,1]$, $C(a,a) = \frac{1}{2}\underbrace{\left(a^2+(1-a)^2\right)}$

f': $2a - 2(1-a) = 0 \Rightarrow$ $\cancel{\boxed{\bar a=\frac{1}{2},\ \bar b=\frac{1}{2}}}$ $\frac{1}{4}$ $\boxed{a=0,\ b=0}$ $\frac{1}{2}$ $\boxed{a=1,\ b=1}$ $\frac{1}{2}$

Fall IV: $C(a,b) = \frac{1}{2}\underbrace{\left(a^2+\frac{(b-a)^2}{2}+(1-b)^2\right)}$



Tangentialebene

Ableitung nach a : $2a - (b-a) = 0$

Ableitung nach b : $(b-a) - 2(1-b) = 0$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a - b = 0 \\ -a + 3b = 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{a=\tfrac{1}{4},\ b=\tfrac{3}{4}}\quad \frac{1}{8}$$

Zentralplanung/Monopol Marktwirtschaft/Wettbewerb

$$\Rightarrow \min_{\substack{a,b\in[0,1]\\ a\leq b}} C(a,b) = \frac{1}{8} < C\left(\bar a=\tfrac{1}{2},\ \bar b=\tfrac{1}{2}\right)$$

Fazit: "sozialistische" Lösung ist 2mal besser als "kapitalistische", aber nicht stabil aus der Perspektive der Geschäfte A, B.