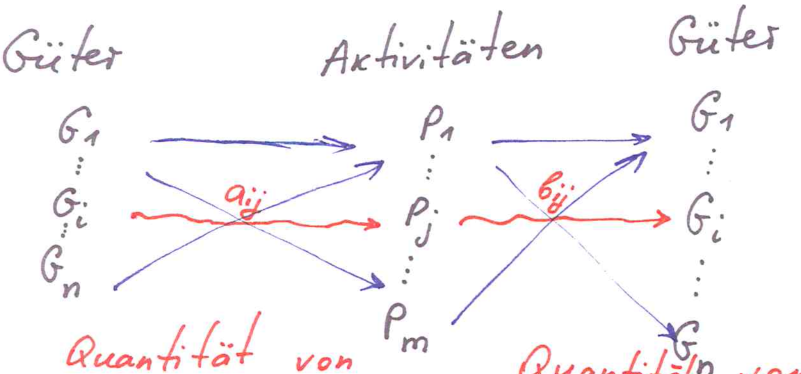
Ökonomisches Wachstumsmodell (von Neumann, 1937)

Frage: Wie schnell wächst / schrumpft eine Ökonomie?
(aus Makroökonomie)



Quantität von Gut G_i verbraucht bei der Aktivität P_j

Quantität von Gut G_i produziert bei der Aktivität P_j

Inputmatrix

$A = (a_{ij})_{ij}$ n m

j-te Spalte

Güter $G_1, \dots, G_n$ verbraucht bei P_j

Outputmatrix

$B = (b_{ij})_{ij}$ n m

j-te Spalte

Güter $G_1, \dots, G_n$ produziert bei P_j

Technologischer Wachstum:

$$\max \alpha \text{ s.t.}$$

$$\exists x \geq 0, x \neq 0 : \underbrace{B \cdot x}_{\text{Outputvektor}} \geq \alpha \cdot \underbrace{A \cdot x}_{\text{Inputvektor}}$$

Intensitätsvektor $\in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$

Technologische Wachstumsrate $\in \mathbb{R}$

$$i = 1, \dots, n : \sum_{j=1}^{m} b_{ij} \cdot x_j$$

Output vom Gut G_i bei der Akt. P_j

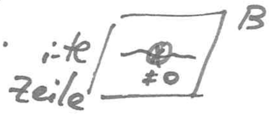
Intensität von Aktivität P_j

Technologisches Wachstumsproblem: finde $x \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ und α, so daß α maximal, gegeben $B \cdot x \geq \alpha \cdot A x$, ist.

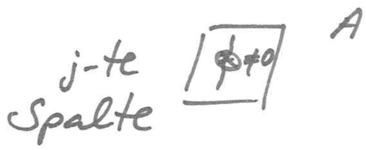
Bezeichnung: $\bar{\alpha}$ - technologische Wachstumsrate
$\bar{x}$ - optimaler Intensitätsvektor

Interpretation: Ökonomie wächst / schrumpft mit der Geschwindigkeit / Rate $\bar{\alpha}$, wenn man Aktivitäten mit Intensität $\bar{x}$ ausführt.

Annahme I: Jede Zeile von B enthält mindestens einen positiven Eintrag, d.h. jedes Gut ist ein Output für irgendwelche Aktivität.



Annahme II: Jede Spalte von A enthält mindestens einen positiven Eintrag, d.h. jede Aktivität hat mindestens ein Gut als Input.



Existenz

Satz: Unter Annahmen I, II $\bar{\alpha}$ existiert und ist positiv.

Beweis: Betrachte $(B - \alpha A)\cdot \underbrace{x}_{x \geq 0,\, x \neq 0} \geq 0$ für festes α.

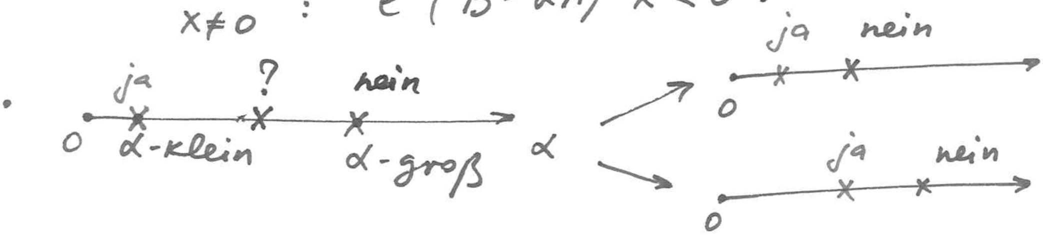
- α klein $\Rightarrow (B - \alpha A)x \geq 0$ lösbar, denn:

  $x > 0 \underset{I}{\Rightarrow} Bx > 0$, aber $\alpha A \cdot x$ wird klein.

- α groß $\Rightarrow (B - \alpha A)x \geq 0$ nicht lösbar, denn:

  $e^T(B - \alpha A) < 0$ für α groß ($e^T A > 0$)

  $\Rightarrow \forall \underset{x \neq 0}{x \geq 0}: \; e^T(B - \alpha A)\cdot x < 0$.

- 

Intervallschachtelung.

Ökonomischer Wachstum: $\min \beta$ s.t.

Preisvektor $\in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$

$$\exists p \geq 0, p \neq 0: \quad \underbrace{p \cdot B}_{\text{Profitvektor}} \leq \beta \, \underbrace{p \cdot A}_{\text{Kostenvektor}}$$

β: Ökonomische Wachstumsrate

$$j = 1, \dots, m: \quad \sum_{i=1}^{n} b_{ij} \cdot p_i$$

b_{ij}: Output vom Gut G_i bei der Aktivität P_j

p_i: Preis des Gutes G_i

Ökonomisches Wachstumsproblem: finde $p \in \mathbb{R}^n_+ \setminus \{0\}$ und β, so daß β minimal, gegeben $p \cdot B \leq \beta \cdot p \cdot A$, ist.

Bezeichnung: $\bar{\beta}$ – ökonomische Wachstumsrate

$\bar{p}$ – optimaler Preisvektor

Interpretation: $pB \leq \beta \cdot pA \iff \forall j = 1, \dots, m \quad \frac{(pB)_j}{(pA)_j} \leq \beta \iff \max_{1 \leq j \leq m} \frac{(pB)_j}{(pA)_j} \leq \beta$

falls $pA > 0$

$$\min \beta \text{ s.t. } pB \leq \beta \cdot pA \iff \min_{\substack{p \geq 0 \\ p \neq 0}} \max_{1 \leq j \leq m} \underbrace{\frac{(pB)_j}{(pA)_j}}_{\text{Profitfaktor}} \quad \begin{array}{l} \leftarrow \text{Profit} \\ \leftarrow \text{Kosten} \end{array}$$

"Größtes Profitfaktor wird minimiert"

Kräfte des Wettbewerbes bei Preisbildung sind im Gange!

Frage: wie verhalten sich ökonomische und technologische Wachstumsraten?

Lemma: Unter Annahmen I, II $\bar{\beta} \leq \bar{\alpha}$.

Beweis: • $(B - \bar{\alpha} A) \cdot x > 0$ hat keine Lösung $x \geq 0$.

Ansonsten: $Bx' > \bar{\alpha} A x' \overset{\text{Stetigkeit}}{\Longrightarrow} Bx' > (\bar{\alpha} + \varepsilon) A x' \Rightarrow$ $\bar{\alpha}$ nicht maximal

klein genug (ε)

(ii) • $(B - \bar{\alpha} A) x > 0$ hat keine Lösung $x \geq 0$

Im Allgemeinen: $\alpha \neq \beta$

Aber: $B\bar{x} \geq \bar{\alpha} \cdot A\bar{x}$ und $\overbrace{(B\bar{x})_i > \bar{\alpha}\,(A\bar{x})_i}^{\text{Gut } G_i \text{ im "Überangebot"}} \Rightarrow \overbrace{\bar{p}_i = 0}^{\text{Preis v… } G_i = \ldots}$

$\bar{p}B \leq \bar{\alpha} \cdot \bar{p}A$ und $\underbrace{(\bar{p}B)_j < \bar{\alpha}\,(\bar{p}A)_j}_{\text{Aktivität } P_j \text{ weist niedriges Profitfaktor auf}} \Rightarrow \underbrace{\bar{x}_j = 0.}_{\text{Aktivität } P_j \text{ ist nicht eingeschaltet}}$

Denn:
- $B\bar{x} \geq \bar{\alpha} \cdot A\bar{x}$ aus Definition
- $\bar{p}B \leq \bar{\beta}\bar{p}A \leq \bar{\alpha} \cdot \bar{p}A$.

  $\left[\begin{array}{l} \bar{\beta} \leq \bar{\alpha} \\ \bar{p}A \geq 0 \end{array}\right]$
- $\underline{\bar{\alpha}\,\bar{p} \cdot A \cdot \bar{x}} \leq \bar{p}B\bar{x} \leq \underline{\bar{\alpha}\bar{p}A\bar{x}} \Rightarrow \bar{p}(B - \bar{\alpha}A)\bar{x} = 0$

  "Komplementarität"

Fazit: $\bar{\alpha}$ technologische Wachstumsrate hat auch ökonomische Bedeutung via Preisen und Komplementarität.