Lineare Optimierung: Dualität

Frage: Wie entstehen Rohstoffpreise?

$m \times n$ Transformationsmatrix

$$(P): \quad \max_{x} \; \underbrace{p^T \cdot x}_{\text{Gewinn}} \quad \text{s.t.} \quad A \cdot x \leq b, \quad x \geq 0$$

"primal"

Preise (p), Güterbündel (x), Rohstoffe $\in \mathbb{R}^m$ (b)

$$\begin{array}{c|c|c} & j & n \\ \hline m & a_j & \\ \hline i & & \end{array}$$

$\underbrace{\text{Rohstoffe } 1,\dots,m \text{ zur Produktion einer Einheit des Gutes } j}_{j\text{-te Spalte}}$

i-te Zeile $\Big\}$ Rohstoff i zur Produktion einer Einheit der Güter $1,\dots,n$

$$(D): \quad \min_{\lambda} \; b^T \cdot \lambda \quad \text{s.t.} \quad A^T \cdot \lambda \geq p, \quad \lambda \geq 0$$

"dual"

$$\underbrace{a_j^T \cdot \lambda}_{\text{Kosten je Einheit des Gutes } j} \geq \underbrace{p_j}_{\text{Preis je Einheit des Gutes } j}, \quad j = 1,\dots,n$$

"willens nicht zu produzieren"
↓
"akzeptables Angebot"

Wie sind (P) und (D) verbunden?

a) Schwache Dualität: (x, λ seien zulässig)

$$\underbrace{p^T}_{\leq A^T\lambda} \cdot \underbrace{x}_{\geq 0} \leq (A^T \lambda)^T \cdot x = \lambda^T \cdot \underbrace{(A^T)^T}_{=A} \cdot x = \underbrace{\lambda^T}_{\geq 0} \underbrace{A \cdot x}_{\leq b} \leq \lambda^T b = b^T \lambda$$

max $Ax \leq b,\ x \geq 0$

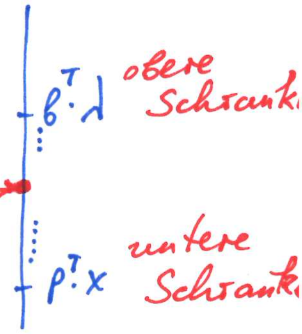
min $A^T \lambda \geq p$, $\lambda \geq 0$

"Man kann keinen größeren Gewinn erzielen als den Betrag, den man bei einem akzeptablen Angebot erhält"

8) Starke Dualität

- (P) ist lösbar $\Leftrightarrow$ (D) ist lösbar
- Im Falle der Lösbarkeit sind die Optimalwerte von (P) und (D) gleich, d.h.

$$\exists \underbrace{x^*, \lambda^*}_{\text{zulässig für (P) bzw. (D)}} \quad \text{mit} \quad p^T \cdot x^* = b^T \cdot \lambda^*$$



Optimalität

Sei (x^*, λ^*) ein primal-duales Lösungspaar:

$$0 \underset{\text{starke Dualität}}{=} b^T\cdot\lambda^* - p^T\cdot x^* = b^T\cdot\lambda^* - x^{*T}\cdot A^T\cdot\lambda^* + \lambda^{*T}\cdot A\cdot x^* - p^T\cdot x^*$$

$$= \underbrace{(b - A\cdot x^*)^T}_{\geq 0}\cdot\underbrace{\lambda^*}_{\geq 0} + \underbrace{(A^T\cdot\lambda^* - p)^T}_{\geq}\cdot\underbrace{x^*}_{\geq 0}$$

(zulässig für (D))

$\Leftrightarrow (b - Ax^*)^T\cdot\lambda^* = 0$ und $(A^T\lambda^* - p)^T\cdot x^* = 0$ zulässig für (P)

$\Downarrow$ insbesondere

$\left[\ b_i - (Ax^*)_i > 0 \Rightarrow \lambda_i^* = 0\ \right]$

i-ter Rohstoff ist nicht vollständig verbraucht

Preis des i-ten Rohstoffes verschwindet

$\Downarrow$ insbesondere

$\left[\ (A^T\cdot\lambda^*)_j = p_j \Leftarrow x_j^* \neq 0\ \right]$

Kosten des j-ten Gutes gleichen seinem Preis

Gut j wird hergestellt

"Komplementarität"

Anwendung Rohstoffallokation /-zuteilung

Anzahl der Firmen; $\in \mathbb{R}^m$ Rohstoffe

$$(P)\quad \max_{x_\ell,\, \ell=1,\dots,k} \sum_{\ell=1}^{k} (p^\ell)^T \cdot x^\ell \quad \text{s.t.} \quad \sum_{i=1}^{k} A^\ell \cdot x^\ell \le b,\ x^{(\ell)} \ge 0,\ \ell = 1,\dots,k$$

Preise auf dem $\mathbb{R}^{n_\ell} \ni$ Markt der Firma ℓ

Güterbündel der Firma ℓ $\in \mathbb{R}^{n_\ell}$

Transformationsmatrix der Firma ℓ $\in \mathbb{R}^{m \times n_\ell}$

$$\begin{array}{cc} & n_\ell \\ m & \boxed{A} \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ x^\ell \end{array} \Big| \ n_\ell$$

"Zentralplanung: verteile b, sodaß Gewinn insgesamt maximal wird!"

$$(D)\quad \min_{\lambda} b^T \cdot \lambda \quad \text{s.t.} \quad \underbrace{(A^\ell)^T \cdot \lambda \ge p^{(\ell)}}_{\text{"akzeptables Angebot für die Firma } \ell\text{"}},\ \ell = 1,\dots,k,\ \lambda \ge 0$$

Rohstoffpreise

"Bepreisungsproblem"

Komplementarität (insbesondere):

- $\lambda_i^* > 0 \Rightarrow \sum_{\ell=1}^{k} (A^\ell \cdot x^{\ell *})_i = b_i$
  i-ter Rohstoffpreis positiv; i-ter Rohstoff verbraucht
- $((A^\ell)^T \cdot \lambda^*)_j > p_j \Rightarrow x_j^{\ell *} = 0$
  Kosten sind größer als Preis des j-ten Gutes; j-tes Gut wird nicht produziert.

z. B.

$$(P)\quad \max_{x_1^1,\, x_2^1,\, x_1^2} 6x_1^1 + 14x_2^1 + 13x_1^2 \quad \text{s.t.} \quad \begin{array}{l} \frac{1}{2}x_1^1 + 2x_2^1 + x_1^2 \le 24 \\ x_1^1 + 2x_2^1 + 4x_1^2 \le 60 \end{array}$$

$x_1^1, x_2^1, x_1^2 \ge 0$

Roggen, Weizen, Kartoffeln; Preise von...

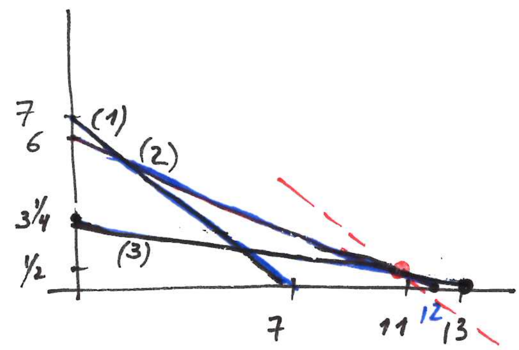
$A^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ Land

$A^1 = \begin{pmatrix} 1/2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Arbeitskräfte

$$(D)\quad \min_{\lambda_1, \lambda_2} 24\lambda_1 + 60\lambda_2 \quad \text{s.t.} \quad \begin{array}{ll} \frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_2 \ge 6 & (2) \\ 2\lambda_1 + 2\lambda_2 \ge 14 & (1) \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 \ge 13 & (3) \end{array} \quad \lambda_1, \lambda_2 \ge 0$$

Preise



$24\lambda_1 + 60\lambda_2 = a^*$

Niveaulinie

graphische Lösung $\Rightarrow$

(2) & (3): $\left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}\lambda_1 + \lambda_2 = 6 \\ \lambda_1 + 4\lambda_2 = 13 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_1^* = 11 \\ \lambda_2^* = 1/2 \end{array}$

$\Downarrow$ Komplementarität

$$\left\{ \begin{array}{l} 1/2\, x_1^1 + 2x_2^1 + x_1^2 = 24 \\ x_1^1 + 2x_2^1 + 4x_1^2 = 60 \\ x_2^1 = 0 \end{array} \right.$$

$\Rightarrow x_1^{1*} = 36,\ x_2^{1*} = 0,\ x_1^{2*} = 6$ Produktion