Lineare Optimierung: Dualität

Frage: Wie entstehen Rohstoffpreise?

m×n-Transformationsmatrix

(P): $\max\; \underset{\text{Preise}}{p^T} \cdot \underset{\text{Güterbündel}}{x}$ s.t. $Ax \le b$, $x \ge 0$ ← Rohstoffe $\in \mathbb{R}^m$

a_j: j-te Spalte: Rohstoffe $1,\dots,m$, die man für die Produktion eines Einheit des Gutes j benötigt

i-te Zeile: Rohstoff i, der für die Produktion je einer Einheit der Güter $1,\dots,n$ benötigt wird.

Dualität:
"Was sind die Rohstoffe wert?"

Rohstoffpreise $\in \mathbb{R}^m$

(D): $\min\; \underbrace{b^T \cdot \lambda}_{\text{Gesamtkosten}}$ s.t. $A^T \lambda \ge p$, $\lambda \ge 0$

↳ $\underbrace{a_j^T \lambda}_{\text{Kosten je Einheit des Gutes } j} \ge \underbrace{p^{(j)}}_{\text{Preis je Einheit des Gutes } j}$, $j = 1, \dots, n$ "willens nicht zu produzieren"

"Akzeptables Angebot"

Wie sind (P) und (D) verbunden?

Hilfssatz: $\min\; c^T x$ s.t. $\underbrace{D \cdot x \ge e}$ hat $\bar{x}$ als Lösung

$d_j^T x - e_j \ge 0$

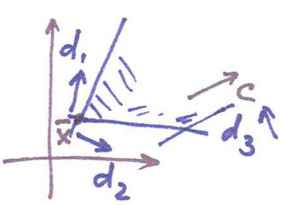
$\iff$

$\exists\, \bar{y} \in \mathbb{R}^m$ mit ① $c = D^T \bar{y}$

② $\bar{y} \ge 0$

③ $\bar{y}^T (D\bar{x} - e) = 0$

Beweis:



$c = \sum_{j \in J_0(\bar{x})} \bar{y}_j \cdot d_j$, wobei: $J_0(\bar{x}) = \{ j \mid d_j^T \bar{x} - e_j = 0 \}$

$\boxed{c = D^T \bar{y}}$, $\underbrace{\bar{y}_j}_{=0} \cdot \underbrace{(d_j^T \bar{x} - e_j)}_{=0 \text{ aktiv};\; >0 \text{ nicht-aktiv}} = 0 \overset{\bar{y}_j \ge 0}{\underset{d_j^T \bar{x} - e_j \ge 0}{\iff}} \boxed{\bar{y} \cdot (D\bar{x} - e) = 0}$

• $c^T x = c^T \bar{x} + \underbrace{c^T}_{= \bar{y}^T D} (x - \bar{x}) \underset{①}{=}$

$= c^T \bar{x} + \bar{y}^T D \cdot (x - \bar{x}) = c^T \bar{x} + \bar{y}^T D \cdot x - \underbrace{\bar{y}^T D \cdot \bar{x}}_{= \bar{y}^T e} \underset{③}{=} c^T \bar{x} + \underbrace{\bar{y}^T}_{\ge 0} \underbrace{(Dx - e)}_{\ge 0,\; x\text{-zulässig}} \underset{②}{\ge} c^T \bar{x}$

Dualitätssatz

- (P) ist lösbar $\Leftrightarrow$ (D) ist lösbar
- Im Falle der Lösbarkeit, sind Optimalwerte von (P) und (D) gleich.

$$(P) \quad \max \; p^T x \quad \text{s.t.} \quad \overbrace{Ax \le b \,,\; x \ge 0}^{M_P}$$

$$(D) \quad \min \; b^T \lambda \quad \text{s.t.} \quad \overbrace{A^T\lambda \ge p \,,\; \lambda \ge 0}^{M_D}$$

zulässige Mengen

Beweis: Sei (P) lösbar:

$$\min \underbrace{-p^T}_{c^T} x \quad \text{s.t.} \quad \underbrace{\begin{pmatrix} -A \\ I \end{pmatrix}}_{D} \cdot x \ge \underbrace{\begin{pmatrix} -b \\ 0 \end{pmatrix}}_{e}$$

x-Lösung von (P) $\Rightarrow$ Hilfssatz

① $-p = (-A^T \mid I) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \end{pmatrix}}_{y}$ ② $\lambda \ge 0,\ \mu \ge 0$ ③ $(\lambda^T \mid \mu^T) \cdot \begin{pmatrix} -Ax+b \\ x \end{pmatrix} = 0$

$$-p = -A^T\lambda + \underbrace{\mu}_{\ge 0} \ge -A^T\lambda \qquad \lambda^T(-Ax+b) + \mu^T x = 0$$

$$\Rightarrow A^T\lambda \ge p,\ \lambda \ge 0 \Rightarrow \boxed{\lambda \in M_D}$$

$$\Rightarrow \lambda^T b = \underbrace{\lambda^T A}_{=p^T+\mu^T} \cdot x - \mu^T x = p^T x$$

$$\Rightarrow \boxed{\lambda^T b = p^T x}$$

Schranke wird angenommen

Außerdem:

$$\underbrace{p^T}_{\le A^T\lambda} \underbrace{x}_{\ge 0} \le (A^T\lambda)^T x = \underbrace{\lambda^T}_{\ge 0} \underbrace{A \cdot x}_{\le b} \le \lambda^T b = b^T\lambda \Rightarrow \boxed{p^T x} \le b^T\lambda \quad \forall x \in M_P,\ \lambda \in M_D$$

untere Schranke für (D)

$\Rightarrow$ λ löst (D)

Umgekehrte Richtung:

Bilde duales Problem zu (D):

$$\min\{b^T\lambda \mid A^T\lambda \ge p,\ \lambda \ge 0\} = -\max\{\underline{-b}^T\lambda \mid \underline{-A}^T\lambda \le -p,\ \lambda \ge 0\} =$$

$$= -\min\{-p^T x \mid (-A^T)^T x \ge -b,\ x \ge 0\} = \max\{p^T x \mid Ax \le b,\ x \ge 0\}. \blacksquare$$

Interpretation:

zulässiger Produktionsplan

- schwache Dualität: $\forall x \in M_P,\ y \in M_D: \quad p^T x \le b^T\lambda$

akzeptables Angebot

„Der Betrieb kann keinen größeren Gewinn erzielen als den Betrag, den er bei einem akzeptablen Angebot erhalten würde."

- starke Dualität: $\max\{p^T x \mid Ax \le b,\ x \ge 0\} = \min\{b^T\lambda \mid A^T\lambda \ge p,\ \lambda \ge 0\}$

maximale Gewinn

minimale Kosten

(falls $M_P \ne \emptyset$ oder $M_D \ne \emptyset$)

Optimalitätsbedingungen

Seien (x, λ) primal-duale Lösungen $\Leftrightarrow$

$$\underset{\text{starke Dualität}}{0 =} b^T \cdot \lambda - p^T \cdot x = b^T \lambda - x^T \cdot A^T \cdot \lambda + \lambda^T \cdot A \cdot x - p^T x =$$

$$= \underbrace{(b - Ax)}_{\geq 0}{}^T \cdot \underbrace{\lambda}_{\geq 0} + \underbrace{(A^T\lambda - p)}_{\geq 0}{}^T \cdot \underbrace{x}_{\geq 0}$$

$\Leftrightarrow$ $(b - Ax)^T \cdot \lambda = 0$ und $(A^T\lambda - p)^T \cdot x = 0$. Komplementarität

- $(b - Ax)^{(i)} > 0$ $\boxed{\lambda^{(i)} = 0}$ | $(A^T\lambda - p)^{(j)} = 0$ $\boxed{x^{(j)} > 0}$: "Gut j hergestellt"

"i-ter Rohstoff nicht völlig verbraucht" $\boxed{b^{(i)} > (Ax)^{(i)}}$ "Preis des i-ten Rohstoffes ist 0" | $\boxed{(A^T\lambda)^{(j)} = p^{(j)}}$: "Kosten für j-tes Gut sind gleich dessen Preis"

Sattelpunkte

- $$\max_{x \geq 0} \{ p^T x \mid Ax \leq b \} = \max_{x \geq 0} \; p^T x + \underbrace{\min_{\lambda \geq 0} \lambda^T \cdot \overbrace{(b - Ax)}^{\text{falls } (b-Ax)^{(i)} < 0}}_{= -\infty} =$$

Strafterm!

Dualität

$$= \max_{x \geq 0} \; \min_{\lambda \geq 0} \boxed{(p^T - y^T \cdot A)x + y^T b} =$$

- $$\min_{\lambda \geq 0} \{ b^T \cdot \lambda \mid A^T \lambda \geq p \} = \min_{\lambda \geq 0} \; b^T \cdot \lambda + \underbrace{\max_{x \geq 0} x^T \cdot \overbrace{(-A^T\lambda + p)}^{\text{falls } (-A^T\lambda + p)^{(j)} > 0}}_{= +\infty}$$

Strafterm!

min/max vertauschen!

$$= \min_{\lambda \geq 0} \; \max_{x \geq 0} \boxed{b^T \cdot \lambda + x^T \cdot (-A^T y + p)}$$

(x^*, λ^*) - Sattelpunkt

$$\max_{x \geq 0} \; \min_{\lambda \geq 0} L(x, \lambda) = \min_{\lambda \geq 0} \; \max_{x \geq 0} L(x, \lambda),$$

wobei $L(x, \lambda) = p^T \cdot x + b^T \lambda - \lambda^T \cdot A \cdot x$ - Lagrange-Funktion

Lagrange-Multiplikatoren für "$Ax \leq b$"