Marketing – Markentreue

Frage: wie entwickelt sich Markentreue?

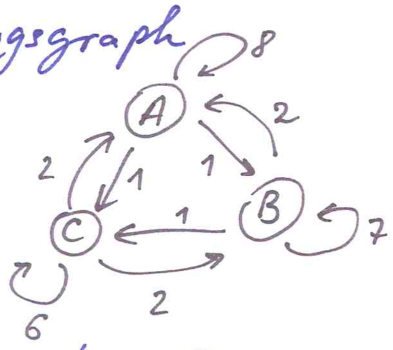
Marken A, B, C und Daten für

Familie 1 : A A A A A A B A C A A A

Familie 2 : C B B B B B B B B A

Familie 3 : C C C C C C C B C A A

→ Übergangsgraph



Übergangsmatrix P

	A	B	C
A	8/10	2/10	2/10
B	1/10	7/10	2/10
C	1/10	1/10	6/10

$$= (p_{ij}) \text{ - Wahrscheinlichkeit des Überganges von } j \text{ nach } i$$

Spalte (j), Zeile (i)

$$p_{ij} = \frac{\text{Anzahl von Übergängen von } j \text{ nach } i}{\text{Anzahl von allen Übergängen von } j}$$

"Spaltensumme = 1", d.h. $e^T \cdot P = e^T$, wobei $e = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$, $e^T = (1, \dots, 1)$

und $e^T \cdot P = (1, \dots, 1) \begin{pmatrix} \cdot\cdot & p_{1j} & \cdot\cdot \\ & \vdots & \\ & p_{nj} & \end{pmatrix} = \Big(\dots, \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_{ij}}_{j\text{-te Spaltensumme}} \dots\Big)$

j-te Spalte

Sei $x^0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{pmatrix}$ der Vektor von Markenanteilen im Zeitpunkt

d.h. $\sum_{j=1}^{n} x_j^0 = 1$ oder $e^T \cdot x = 1$

$x_i^1 := (P \cdot x^0)_i = \sum_{j=1}^{n} p_{ij} \cdot x_j^0$ - Vektor von Markenanteilen im Zeitpunkt.

Allgemein: $\underbrace{x^{k+1} = P x^k}_{\text{Update von Markenanteilen}}$ Markov-Prozess (Stochastik)

z.z. $x^k \in \underbrace{\Delta}_{\text{Simplex}} := \{ x \geq 0 \mid \underbrace{e^T x = 1}_{\text{Summe} = 1} \} \Rightarrow x^{k+1} \in \Delta$

Dazu: $e^T \cdot x^{k+1} = \underbrace{e^T \cdot P}_{= e^T \text{, da Spaltensumme} = 1} \cdot x^k = \underbrace{e^T x^k = 1}_{\text{Voraussetzung.}}$

Frage: konvergiert $x^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \bar{x}$ gegen einen Markenanteilsvektor für alle Anfangsanteile $x^0 \in \Delta$?

wenn ja: $x^{k+1} = P x^k \Rightarrow \bar{x} = P\bar{x}$ "stabile Markenanteile $\sim$ Markentreue!"

$$\underset{\bar{x}}{\underset{\downarrow}{x^{k+1}}} = \underset{\bar{x}}{\underset{\downarrow}{P x^k}}$$

Eigenvektor von P zum Eigenwert 1

Existenz: Lineare Algebra oder lineare Optimierung

Zum Konvergenzbegriff $x^k \to \bar{x}$

$x^k \to \bar{x},\ k \to \infty \ :\Longleftrightarrow\ \| x^k - \bar{x} \| \to 0,\ k \to \infty$

"x^k konvergiert gegen $\bar{x}$"

$\bar{x}$: Grenzwert

"Abstand zwischen x^k und $\bar{x}$ konvergiert gegen 0"

Norm $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}_+$

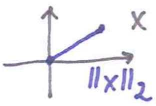
(i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$ – Definitheit

(ii) $\|\underset{\in\mathbb{R}}{\alpha} x\| = \underbrace{|\alpha|}_{\text{Betrag}} \cdot \|x\|$ – Absolute Homogenität

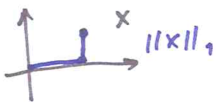
(iii) $\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$ – Dreiecksungleichung

Beispiele: $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

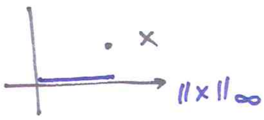
- $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$ – Euklidische Norm



- $\|x\|_1 = |x_1| + |\dots + |x_n|$ – Summennorm



- $\|x\|_\infty = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ – Maximumsnorm



$\|x^k - \bar{x}\| \to 0,\ k\to\infty \Leftrightarrow \underset{\text{Toleranz}}{\forall \varepsilon > 0}\ \underset{\text{Schwelle}}{\exists N \ge 0}\ \underset{\text{Index}}{\forall k \ge N} : \underbrace{\|x^k - \bar{x}\| \le \varepsilon}_{\text{Abstand liegt ab einem bestimmten Schwellenindex unter}}$

Konvergenz für $x^{k+1} := Px^k$

z.B. $P = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$, $x^0 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$, $x^1 = Px^0 = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ ← Oszillation $\Downarrow$ kein Grenzwert

$$x^2 = Px^1 = \begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

Annahme: P besitzt mindestens eine positive Zeile (existiert eine globale Marke)

- P habe eine positive Zeile i: $\underbrace{a_{i1}}_{>0}, \dots, \underbrace{a_{in}}_{>0}$
- Setze $\alpha := \min_{1\le j\le n} a_{ij} > 0$ (kleinste Zahl), $B := \begin{pmatrix}0&\cdots&0\\1&\cdots&1\\0&\cdots&0\end{pmatrix}$ ← i-te Zeile aus Einsen
- Definiere $\bar P := \dfrac{P-\alpha B}{1-\alpha}$ $\left(\Rightarrow P = (1-\alpha)\bar P + \alpha B\right)$
- Es gilt (i) $\bar P = \dfrac{P-\alpha B}{1-\alpha} \ge 0$, da i-te Zeile nichtnegativ

  (ii) $e^T\bar P = \dfrac{1}{1-\alpha}\left(\underbrace{e^TP}_{e^T} - \alpha \underbrace{e^TB}_{e^T}\right) = \dfrac{1-\alpha}{1-\alpha}e^T = e^T$

- $\|x^{k+1}-\bar x\|_1 = \|Px^k - P\bar x\|_1 = \|P(x^k-\bar x)\|_1 = \|((1-\alpha)\bar P+\alpha B)(x^k-\bar x)\|_1$

$$= \|(1-\alpha)\bar P(x^k-\bar x) + \alpha \underbrace{B(x^k-x)}\|_1 = (1-\alpha)\|\bar P(x^k-\bar x)\|_1 =$$

$$\begin{array}{l} \\ i\text{-te Komponente} \rightarrow \end{array} \underbrace{B(x^k-x)} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots \\ e^T(x^k-\bar x)\\ \vdots\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ e^Tx^k - e^T\bar x\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}$$

$$= (1-\alpha)\, e^T|\bar P(x^k-\bar x)| \underset{\text{Dreiecksungleichung}}{\le} (1-\alpha)\underbrace{e^T\bar P}_{=e^T}|x^k-\bar x| = (1-\alpha)e^T|x^k-\bar x| = (1-\alpha)\|x^k-\bar x\|_1$$

$$\le \dots \le \underbrace{(1-\alpha)^{k+1}}_{\substack{\in(0,1),\text{ da } \alpha\in(0,1)\\ \downarrow k\to\infty\\ 0}}\underbrace{\|x^0-\bar x\|_1}_{\text{feste Zahl}}$$

$\Rightarrow \|x^{k+1}-\bar x\|_1 \to 0,\ k\to\infty$

oder äquivalent

$x^k \to \bar x,\ k\to\infty$