Markt oder Jungle

Frage: Auf welchen Prinzipien basiert die Güterverteilung?

Preise & Eigentum → Markt | Hierarchie → Jungle

Grenze zwischen ökonomisch und politisch

Häuser - Markt

Agenten: 1, 2, …, N

Häuser: 1, 2, …, N

Verteilung

Matching, d.h.
(i) jeder Agent kriegt ein Haus
(ii) jedes Haus wird im Besitz eines Agenten sein

(Graphentheorie)

$I = \{1, \dots, N\}$ ← Menge von Agenten/Häusern

Annahmen

- o.B.d.A. Anfangsverteilung $1 \to 1,\ 2 \to 2,\ \dots,\ N \to N$ Eigentum
- i-ter Agent hat Präferenzen $u_i(1), \dots, u_i(j), \dots, u_i(N)$ ← Nutzen des Hauses j für Agent i, die paarweise verschieden sind.

(Optimierung) Bepreisung!

① $$j_i \in \arg\max_{j=1,\dots,N} u_i(j) \quad \text{s.t.} \quad p_j \le p_i$$

- j_i: bestes Haus, das sich Agent i leisten kann
- $u_i(j)$: Nutzen des Hauses j für den Agenten i
- p_j: Preis des Hauses j
- p_i: Preis des Hauses i (im Besitz des Agenten i)

② $$\bigcup_{i=1}^{N} j_i = \{1, \dots, N\}$$ – entspricht (i), (ii)

Vereinigung aller ausgewählten Häuser

$\boxed{j_i,\ i = 1, \dots, N}$ – Matching / Markt-Gleichgewicht

j_i: Agent i bekommt Haus j_i

„stabile Verteilung, d.h. niemand möchte unter den Preisen p_i, $i=1,\dots,N$ variieren"

Ist Markt-Gleichgewicht ein gut gestelltes Problem?

Existenz — Eindeutigkeit (Ü) — Berechnung

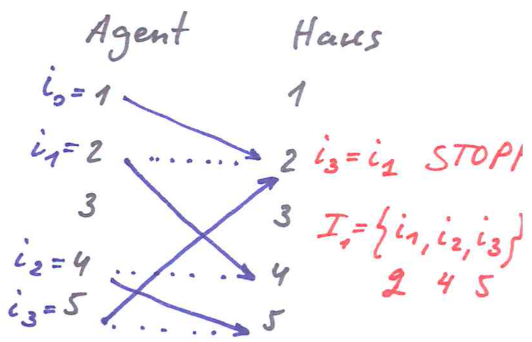
Algorithmus über Handelskreise (David Gale, 1974)

systematische, logische Regel oder Vorgehensweise, die zur Lösung eines vorliegenden Problems führt.

$(*)$
- $i_{k+1} := \underset{j \in I}{\arg\max}\ u_{i_k}(j)$ - am meisten präferiertes Haus des Agenten i_k
- bis $i_{k+1} = i_q$ für ein $q \leq k$

Definiere $I_1 := \{ i_q, \dots, i_k \}$

Wiederhole $(*)$ mit $I \setminus I_1$ statt I
"ohne"



→ Somit entsteht eine Partition $I = \bigcup_{\ell=1}^{L} I_\ell$ ← disjunkte Handelskreise

Definiere Preise: $p_1 > p_2 > \dots > p_\ell > \dots > p_L > 0$ — Preis für Häuser I_ℓ

Definiere Matching: $i \in I \Rightarrow i = i_k \in I_\ell$ für Partition ℓ und Index k

$(**)$ wähle $j_i := i_{k+1}$ - das präferierteste Haus des Agenten i_k im Handelskreis

Satz: Matching $(**)$ ist Markt-Gleichgewicht.

Beweis: ① $i \in I \Rightarrow i \in I_\ell$. ($i = i_k$)

Falls $p_j \leq p_i$, so $j \in I_\ell, I_{\ell+1}, \dots, I_L$

$\Rightarrow$ Bei der Wahl von $j_i = i_{k+1}$ waren Häuser $I_\ell, I_{\ell+1}, \dots, I_L$ noch in der Auswahl, aber nicht präferiert.

② nach Konstruktion

Häuser-Jungle

Agenten $1, \dots, N$ $\xrightarrow{\text{Verteilung}}$ Häuser $1, \dots, N$

Häuser $\xrightarrow{\text{Matching}}$ Agenten

$I = \{1, \dots, N\}$

Annahmen

- Relation "stärker als ..."

  o.B.d.A.

  $1 S 2, 2 S 3, \dots, (N-1) S N$

  Hierarchie!

- alle Präferenzen sind strikt: $u_i(1), \dots, u_i(N)$ sind paarweise verschieden

① Existieren keine Agenten i, ℓ mit

$i S \ell$ und $u_i(j_i) < u_i(j_\ell)$

"i stärker als ℓ"

"i-ter Agent würde das Haus j_ℓ des ℓ-ten Agenten präferieren und doch nicht auswählen"

② $\bigcup_{i=1}^{N} j_i = \{1, \dots, N\}$ - entspricht (i) und (ii)

$\boxed{j_i ; i = 1, \dots, N}$ Matching, Jungle-Gleichgewicht

Agent i bekommt Haus j_i

"stabile Verteilung, d.h. stärkere wollen von schwächeren nichts mehr."

Algorithmus über Stärke
(Ariel Rubinstein, 2003)

Induktiv: $j_i := \underset{j \in I \setminus \{j_1, \dots, j_{i-1}\}}{\operatorname{argmax}} u_i(j) \quad , i = 1, \dots, N$

(***) Agent i wählt sein am meisten präferiertes Haus nachdem die stärkeren Agenten $1, \dots, i-1$ gewählt haben

Satz: Matching (***) ist Jungle-Gleichgewicht.

Beweis: ① Angenommen $i S \ell$ und $u_i(j_i) < u_i(j_\ell)$

$\Rightarrow$ Agent ℓ wählt sein Haus j_ℓ nachdem Agent i gewählt hat. Dieses präferiert aber j_ℓ statt j_i. ↯ Widerspruch zur Definition von j_i im Algorithmus.