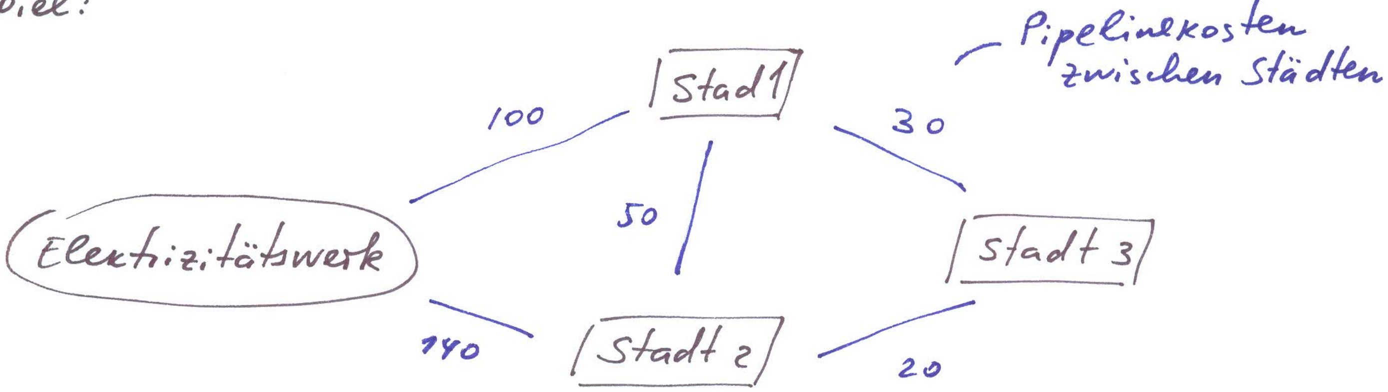
Kostenaufteilung nach Shapley, 1953

Frage: wie teilt man die Kosten bei einem gemeinschaftlichen Projekt auf eine faire Weise?

Beispiel:



Koalition S	$\{1\}$	$\{2\}$	$\{3\}$	$\{1,2\}$	$\{1,3\}$	$\{2,3\}$	$\{1,2,3\}$
Kosten $c(S)$	100	140	130	150	130	150	150

Grandkoalition

günstigste Route, die alle Städte in S verbindet

wie soll man die Kosten von 150 unter Städten 1,2,3 gerecht verteilen?

Spieler $N=\{1,\dots,n\}$

Probabilistischer Ansatz

Summe über alle Koalitionen, die i nicht enthalten

$$\varphi_i(N,c) = \sum_{\substack{S\subseteq N\\ i\notin S}} p_S(i)\,\underbrace{\left[c(S\cup\{i\}) - c(S)\right]}_{\text{Marginalkosten von } i \text{ für die Koalition } S}$$

Kostenfunktion auf Koalitionen $c: S\subseteq N \mapsto \mathbb{R}$

Shapley-Wert = Kostenanteil des Spielers $i\in N$

Wahrscheinlichkeit, daß Koalition S gebildet wird

Annahme: Gleichverteilung, d.h. unabhängig von i und Elementen von S, aber bloß von der Elementenanzahl.

Fakultät

Gegeben seien n Dinge: $a_1, \dots, a_n$. Jede Anordnung dieser n Dinge nennen wir eine Permutation. Die Gesamtzahl aller Permutation ist zu bestimmen!

$n=1$	a_1	1	$1! = 1$
$n=2$	$a_1 a_2$, $a_2 a_1$	2	$2! = 1\cdot 2 = 2$
$n=3$	$a_1 a_2 a_3$, $a_1 a_3 a_2$, $a_2 a_1 a_3$, $a_2 a_3 a_1$, $a_3 a_1 a_2$, $a_3 a_2 a_1$	6	$3! = 1\cdot 2\cdot 3 = 6$
$\vdots$			$\vdots$

n Dinge: $a_1, a_2, \dots, a_n$

n Plätze:
$n \quad n-1 \quad \dots \quad 1$ [illegible]
$1 \quad 2 \quad \dots \quad n$

$\Big\}\; n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 =: n!$ "n-Fakultät"

Binomialkoeffizient

Gegeben seien n Dinge: $a_1, \dots, a_n$. Wieviele Möglichkeiten gibt es, eine Gruppe von k Elementen aus diesen n Dingen auszuwählen?

n Dinge: $a_1, a_2, \dots, a_n$

k Plätze:
$n \quad n-1 \quad \dots \quad n-k+1$
$1 \quad 2 \quad \dots \quad k$

[illegible] $k!$ [illegible]

$$\Bigg\}\; \frac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} =: \binom{n}{k}$$

Formel: $\binom{n}{k} = \dfrac{n\cdot(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!}\,\dfrac{\cdot(n-k)\cdot\ldots\cdot 1}{\cdot(n-k)\cdot\ldots\cdot 1} = \dfrac{n!}{k!\,(n-k)!}$

Beachte: $0! = 1$, $\binom{n}{0} = \dfrac{n!}{0!\,n!} = 1$, $\binom{n}{n} = \dfrac{n!}{n!\,0!} = 1$

Es gilt für $n, k \in \mathbb{N}$, $k \le n$.

(i) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ (ii) $\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \binom{n+1}{k}$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \binom{n}{n-k}$$

$$\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} = \frac{n!}{(k-1)!\,(n-k+1)!}^{(k} + \frac{n!}{k!\,(n-k)!}^{(n-k+1} =$$

$$= \frac{n!\cdot k + n!\cdot(n-k+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{n!\cdot(n+1)}{k!\,(n-k+1)!} = \frac{(n+1)!}{k!\,(n-k+1)!} = \binom{n+1}{k}$$

Zur Berechnung von $p_S(i)$ = W'keit, die Koalition S aus der Menge $N\setminus\{i\}$ "ohne" auszuwählen

1. Schritt: wähle Elementenanzahl von S aus

$s = 0, 1, \dots, \underbrace{n-1}_{\text{Anzahl von Elementen in } N\setminus\{i\}}$

$\Rightarrow$ W'keit, daß Elementenanzahl s ist, beträgt $\frac{1}{n-1}$.

2. Schritt: wähle eine s-elementige Teilmenge S aus $(n-1)$-elementigen Menge $N\setminus\{i\}$ aus

$\hookrightarrow$ Es gibt $\binom{n-1}{s}$ "n-1 über s" Möglichkeiten

$\Rightarrow$ W'keit, S als s-elementige Teilmenge zu wählen, beträgt $\frac{1}{\binom{n-1}{s}}$

Folglich: $p_S(i) = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\binom{n-1}{s}} = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{\binom{n-1}{|S|}}$.

$|S| = s$

Kardinalität von S = Anzahl von Elementen

Wie berechnet man $\binom{n-1}{s}$?

Fakultät / Binomialkoeffizient (s. nächstes Blatt)

$$\binom{n-1}{|S|} = \frac{(n-1)!}{|S|!\,(n-|S|-1)!}$$

$$p_S(i) = \frac{1}{n}\cdot\frac{|S|!\,(n-1-|S|)!}{(n-1)!} = \frac{|S|!\,(n-1-|S|)!}{n!}$$

$$\varphi_i(N,c) = \sum_{\substack{S\subseteq N\\ i\notin S}} \frac{|S|!\,(n-1-|S|)!}{n!}\cdot\left[c(S\cup\{i\}) - c(S)\right]$$

Beispiel: $\varphi_1(N,c) = \frac{210}{6}$ (35), analog $\varphi_2(N,c) = \frac{390}{6}$ (65), $\varphi_3 = \frac{300}{6}$ (50) $\Rightarrow \sum_{i=1}^{3}\varphi_i(N,c) = 150$ ← Kostenteilung

$i=1$

$S = \emptyset, \{2\}, \{3\}, \{2,3\}$:

$\emptyset$: $\frac{0!\,(3-1-0)!}{3!}[100-0] = \frac{200}{6}$

$\{2\}$: $\frac{1!\,(3-1-1)!}{3!}[150-140] = \frac{10}{6}$

$\{3\}$: $\frac{1!\,(3-1-1)!}{3!}[130-130] = 0$

$\{2,3\}$: $\frac{2!\,(3-1-2)!}{3!}[150-150] = 0$

$\Sigma = \frac{210}{6}$