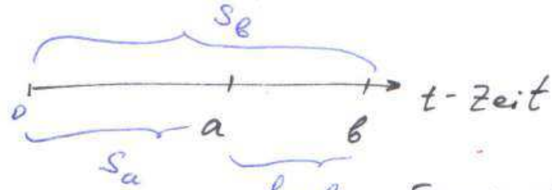
Forward Rates

Spot Rate s_t – Zinssatz für Geldanlagen für Laufzeit t.

Diskontierungsfaktor (Abzinsungsfaktor) – $d_t = \frac{1}{(1+s_t)^t}$, $d_t = \frac{1}{1+s_t \cdot t}$, $d_t = e^{-s_t \cdot t}$

geometrisch   linear   stetig

Forward Rate – Zinssatz für in der Zukunft liegende Zeiträume



$f_{a,b}$ – Forward Rate für den Zeitraum $[a,b]$

Endwertvergleich:
(Anlage 1 €)

$$(1+s_a)^a \cdot (1+f_{a,b})^{b-a} = (1+s_b)^b$$

$$\Rightarrow \quad f_{a,b} = \sqrt[b-a]{\frac{(1+s_b)^b}{(1+s_a)^a}} - 1 = \sqrt[b-a]{\frac{d_a}{d_b}} - 1$$

geometrisches Diskontieren!

Speziell, $\underbrace{a := k,\ b := k+1}_{\text{eine Periode } [k,k+1]}$:

$$f_{k,k+1} = \sqrt[1]{\frac{d_k}{d_{k+1}}} - 1 = \frac{d_k - d_{k+1}}{d_{k+1}}$$

Für kurzfristige Finanzgeschäfte nimmt man lineares Diskontieren zugrunde

$$(1+s_a \cdot a) \cdot (1+f_{a,b} \cdot (b-a)) = (1+s_b \cdot b)$$

$$\Rightarrow \quad f_{a,b} = \left(\frac{1+s_b \cdot b}{1+s_a \cdot a} - 1\right) \frac{1}{b-a} = \left(\frac{d_a}{d_b} - 1\right) \cdot \frac{1}{b-a}$$

Beachte: hier $a := k$, $b := k+1$ gibt auch

$$f_{k,k+1} = \left(\frac{d_k}{d_{k+1}} - 1\right) \cdot \frac{1}{1} = \frac{d_k - d_{k+1}}{d_{k+1}}.$$

Forward Rate Agreement (FRA)

- Vereinbarung zwischen zwei Partnern bzgl. zukünftiger Zinszahlungen.

N - Nominalbetrag
a - Starttermin
b - Endtermin
$f_{a,b} = \left(\frac{1+s_b \cdot b}{1+s_a \cdot a}\right) \cdot \frac{1}{b-a}$
- Forward Rate
(lineares Diskontieren)

} vereinbart

i_{ref} - Referenzzinssatz zum Zeitpunkt a
(z.B. LIBOR, EURIBOR)
London Interbank Offered Rate / European Iterbank Offered Rate

} variabel/unbekannt zum Zeitpunkt 0

Ausgleichszahlung im Zeitpunkt a: $A = \frac{\overbrace{N \cdot (i_{ref} - f_{a,b}) \cdot (b-a)}^{\text{Zinsendifferenz}}}{\underbrace{1 + i_{ref} \cdot (b-a)}_{\text{Diskontieren auf Zeitpunkt a}}}$

$A > 0 \Rightarrow$ Käufer erhält A, d.h. $i_{ref} > f_{a,b}$
$A < 0 \Rightarrow$ Verkäufer erhält A, d.h. $i_{ref} < f_{a,b}$

$\Rightarrow$ "Absicherung gegen hohen Zinssätzen in der Zukunft für einen Kreditaufnehmer kann durch FRA-Kauf realisiert werden $\rightarrow$ Hedging" (umgekehrt Spekulation)

Annahme: FRA-Käufer will im Zeitpunkt a den Kredit N aufnehmen mit Rückzahlung zum Zeitpunkt b.

1. Fall: (irrelevant) $\boxed{i_{ref} = f_{a,b}} \Rightarrow A = 0$ und $R = N(1 + i_{ref} \cdot (b-a)) = N(1 + f_{a,b}(b-a))$.

2. Fall: (vorteilhaft) $\boxed{i_{ref} > f_{a,b}} \Rightarrow \underset{\text{FRA-Zahlung}}{A > 0}$ und $R = \underbrace{(N-A)}_{\text{der aufzunehmende Kredit}}(1 + i_{ref}(b-a)) =$

$= N\left(1 - \frac{(i_{ref} - f_{a,b})(b-a)}{1 + i_{ref}(b-a)}\right) \cdot (1 + i_{ref}(b-a)) = N(1 + i_{ref}(b-a) - i_{ref}(b-a) + f_{a,b}(b-a))$

$= N(1 + f_{a,b}(b-a))$ $\rightarrow$ Zinssatz effektiv ist $f_{a,b}$!

3. Fall: (unvorteilhaft) $\boxed{i_{ref} < f_{a,b}} \Rightarrow \underset{\text{FRA-Auszahlung}}{A < 0}$ und $R = \underbrace{(N-A)}_{\text{der aufzunehmende Kredit}}(1 + i_{ref}(b-a)) \overset{\text{s.o.}}{=} N(1 + f_{a,b}(b-a))$

Fazit: die effektive Verzinsung liegt auf dem Niveau $f_{a,b}$!
Strategie: Steigende Zinsen $\rightarrow$ FRA-Kauf.
Fallende Zinsen $\rightarrow$ FRA-Verkauf.

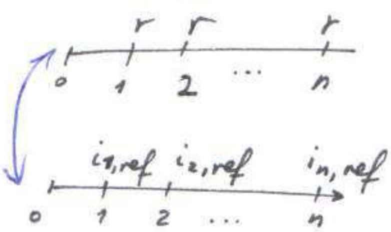
Swaps

- Vereinbarung zwischen zwei Partnern bzgl. Zinsvertauschung.

n - Laufzeit
N - Nominalkapital
r - Swap Rate = Festzinssatz } vereinbart

$i_{k,ref}$ - variabler Zinssatz in der Periode $[k-1,k]$ (z.B. 12-LIBOR) } unbekannt

Vertauschung von Zinsen:



Äquivalenzprinzip: bzgl. Spot Rates s_k und $d_k := \frac{1}{(1+s_k)^k}$

$$\underbrace{r\cdot\sum_{k=1}^{n} d_k}_{\text{Barwert auf der Festzins-Seite}} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} i_{k,ref}\cdot d_k}_{\text{Barwert auf der variablen Seite}}$$

Annahme: $i_{k,ref} = \underbrace{f_{k-1,k}}_{\text{Forward Rates}}$ (z.B. durch FRA gesichert)

$$\Rightarrow r\cdot\sum_{k=1}^{n} d_k = \sum_{k=1}^{n} f_{k-1,k}\cdot d_k \Rightarrow f_{k-1,k} = \frac{d_{k-1}-d_k}{d_k}$$

$$\Rightarrow r\cdot\sum_{k=1}^{n} d_k = \sum_{k=1}^{n} d_{k-1}-d_k = (d_0-\cancel{d_1})+(\cancel{d_1}-\cancel{d_2})+\dots+(\cancel{d_{n-1}}-d_n) = \underbrace{d_0}_{=1}-d_n$$

"Teleskopsumme"

$$\Rightarrow r = \frac{1-d_n}{\sum_{k=1}^{n} d_k}$$ - "fairer" Zinssatz eines Swaps

Beispiel: $s_1 = 2\%$, $s_2 = 2{,}61\%$, $s_3 = 3{,}12\%$

$$\Rightarrow d_1 = \frac{1}{1{,}02} = 0{,}980392,\quad d_2 = \frac{1}{1{,}0261^2} = 0{,}949775,\quad d_3 = \frac{1}{1{,}0312^3} = 0{,}911950$$

$$\Rightarrow \underset{\uparrow}{r} = \frac{1-d_3}{d_1+d_2+d_3} = \frac{1-0{,}911950}{0{,}980392+0{,}949775+0{,}911950} = 0{,}03098 = 3{,}10\%$$

"fairer" Swap Rate

Ermittlung von Spot Rates aus Swap Rates

r_k – Swap Rate eines Swaps der Laufzeit $k = 1, \dots, n$

vereinbart

Ansatz über faire Swap Rates:

$$r_k = \frac{1-d_k}{\sum_{j=1}^{k} d_j} \Rightarrow r_k \sum_{j=1}^{k-1} d_j = 1 - \frac{1+r_k}{(1+s_k)^k}$$

$r_k \quad r_k \quad \dots \quad r_k$

$1 \quad 2 \quad \dots \quad k$

$$\boxed{\underbrace{r_k \cdot \sum_{j=1}^{k} d_j}_{\text{Zinszahlungen + Rückzahlung 1}} + \underbrace{d_k}_{\text{Nominalbetrag}} = 1}$$

$$\Rightarrow \quad s_k = \sqrt[k]{\frac{1+r_k}{1-r_k \sum_{j=1}^{k-1} d_j}} - 1 \,, \quad k = 2, \dots, n$$

und $s_1 = r_1$.

Boot-Strapping

(sukzessive aufbauen!)

mit $d_j = \frac{1}{(1+s_j)^j}$

Beispiel: $r_1 = 2\,\%$, $r_2 = 2{,}6\,\%$, $r_3 = 3{,}1\,\%$

$\Rightarrow$ • $s_1 = r_1 = 2\,\%$, $d_1 = \frac{1}{1+s_1} = \underline{0{,}9804}$

• $s_2 = \sqrt[2]{\frac{1+r_2}{1-r_2 \cdot d_1}} - 1 = \sqrt[2]{\frac{1+0{,}026}{1-0{,}026 \cdot 0{,}9804}} - 1 = \underline{2{,}608\,\%}$,

$d_2 = \frac{1}{(1+s_2)^2} = 0{,}9498$

• $s_3 = \sqrt[3]{\frac{1+r_3}{1-r_3\,(d_1+d_2)}} - 1 = \sqrt[3]{\frac{1{,}031}{1-0{,}031\,(0{,}9804+0{,}9498)}} - 1 =$

$= \underline{3{,}122\,\%}$.

Zinsstrukturkurve lässt sich aus Swap Rates aufstellen.