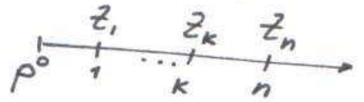
Zinsstruktur

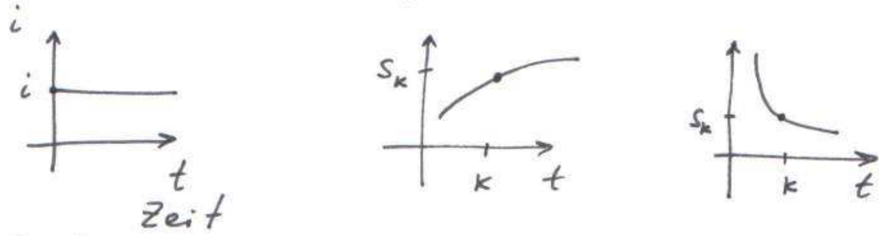
Zinsen sind i.A. abhängig von der Laufzeit der Geldanlage bzw. -aufnahme:



Barwerte:

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{Z_k}{(1+i)^k}$$

$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{Z_k}{(1+s_k)^k}$$



$s_k = i$

flache Zinsstruktur normale Zinsstruktur inverse Zinsstruktur

"je länger Zeitraum, desto höher der Zinssatz"

Spot Rate s_k, $k = 1, \dots, n$
Zinssatz für eine Anlage für k Zinsperioden

Geometrisch:

$$P = \sum_{k=1}^{n} Z_k \cdot d_k , \quad \text{wobei} \quad d_k = \frac{1}{(1+s_k)^k}$$

Linear:

$$P = \sum_{k=1}^{n} Z_k \cdot d_k , \quad \text{wobei} \quad d_k = \frac{1}{1+s_k \cdot k}$$

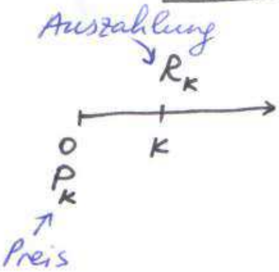
Stetig:

$$P = \sum_{k=1}^{n} Z_k \cdot d_k , \quad \text{wobei} \quad d_k = e^{-s_k k}$$

Bessere Bewertung der Geldströme!

Frage: wie ermittelt man s_k, $k=1,\dots,n$?

Ermittlung von Spot Rates aus Zerobonds



- Zerobond der Laufzeit $K = 1, \dots, n$

Barwertvergleich: $P_K = \frac{R_K}{(1+S_K)^K} \Rightarrow S_K = \sqrt[K]{\frac{R_K}{P_K}} - 1$

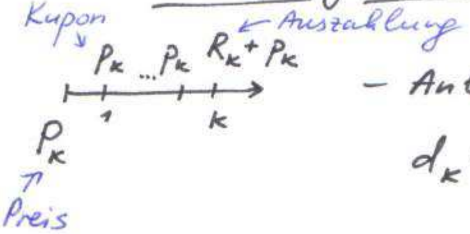
Beispiel:

K	1	2	3
P_K	97,94	95,37	92,59

$\Rightarrow$ $S_1 = 2,10\%$, $S_2 = 2,40\%$, $S_3 = 2,60\%$ } normale Zinsstruktur

$R_K = 100$, $K = 1,2,3$.

Ermittlung von Spot Rates aus Anleihen



- Anleihe der Laufzeit $K = 1, \dots, n$.

$d_K := \frac{1}{(1+S_K)^K}$ Diskontierungsfaktoren

Spot Rates (unbekannt)

$\boxed{\text{Anleihe-Stripping}}$

Lineares Gleichungssystem bzgl $(d_1, d_2, \dots, d_n)$

$$
\begin{aligned}
(R_1 + p_1) \cdot d_1 & & & = P_1 \\
p_2 \cdot d_1 + (R_2 + p_2)\, d_2 & & & = P_2 \\
\dots & & & \vdots \\
p_n \cdot d_1 + p_n \cdot d_2 + \dots & + (R_n + p_n)\, d_n & & = P_n
\end{aligned}
$$

(Dreiecksgestalt $\rightarrow$ sukzessives Lösen möglich $\longrightarrow$ $S_K := \sqrt[K]{\frac{1}{d_K}} - 1$.

Beispiel: Anleihen
A 1: $P_1 = 100$, $p_1 = 8\%$
A 2: $P_2 = 96,54$, $p_2 = 7\%$
A 3: $P_3 = 95$, $p_3 = 8\%$ und $R_1 = R_2 = R_3 = 100$

$$
\begin{aligned}
108\, d_1 & = 100 \\
7\, d_1 + 107\, d_2 & = 96,54 \\
8\, d_1 + 8\, d_2 + 108\, d_3 & = 95
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow d_1 = \frac{100}{108} = 0,925926 \Rightarrow S_1 = \frac{1}{d_1} - 1 = 8\%$

$d_2 = \frac{96,54 - 7 \cdot 0,925926}{107} = 0,841668 \Rightarrow S_2 = \sqrt{\frac{1}{d_2}} - 1 = 9\%$

$d_3 = \frac{95 - 8 \cdot 0,925926 - 8 \cdot 0,841668}{108} = 0,748697 \Rightarrow S_3 = \sqrt[3]{\frac{1}{d_3}} - 1 = 10,13\%$

Spot Rates aus verschiedenen Anleihen

Gegeben seien Anleihen

	Laufzeit	Preis	Z_1	Z_2	Z_3
			Auszahlungen/Zinsen		
A_1 :	1	100,00	108		
A_2 :	2	96,54	7	107	
A_3 :	3	95,00	8	8	108
B :	3	102,49	11	11	111

Spot Rates aus A_1, A_2, A_3 sind $s_1 = 8\%$, $s_2 = 9\%$, $\boxed{s_3 = 10{,}13\%}$ (s.o.)

Spot Rates aus A_1, A_2, B sind $s_1 = 8\%$, $s_2 = 9\%$, $\boxed{\bar{s}_3 = 10{,}15\%}$ (analog)

Welche Anleihe A_3 oder B sollte man nehmen? Unterschiedlich!

- Anleihe A_3 kann man aus A_1, A_2, B konstruieren, so daß der Preis dieses Portfolios kleiner als bei A_3 ist.

Dazu:

$$\left.\begin{aligned} 108x_1 + 7x_2 + 11x_3 &= 8 \\ 107x_2 + 11x_3 &= 8 \\ 111x_3 &= 108 \end{aligned}\right\} \underset{\text{Löse das Lineare Gleichungssystem}}{\Rightarrow} \left.\begin{aligned} x_1 &= -0{,}023388 \\ x_2 &= -0{,}025259 \\ x_3 &= 0{,}972973 \end{aligned}\right\} \text{Portfolio}$$

Preis des Portfolios:

$$P_{port} = \underbrace{-0{,}023388}_{A_1 \text{ verkaufen}} \cdot 100 \underbrace{- 0{,}025259}_{A_2 \text{ verkaufen}} \cdot 96{,}54 + \underbrace{0{,}0972973}_{B \text{ kaufen}} \cdot 102{,}49 = \mathbf{94{,}94}$$

$\Rightarrow$ $P_{port} = 94{,}94 < P_3 = 95{,}00$ $\Rightarrow$ Portfolio A_3 ist überbewertet

Also: $\bar{s}_3 = 10{,}15\%$ ist adequat.

Idee: Nur "optimale" Anleihen werden herangezogen!

Ermittlung von Spot Rates aus (beliebigen) Anleihen

$$\begin{array}{cccccc} & Z_1^i & & Z_k^i & & Z_n^i \\ \hline P^i & 1 & \cdots & k & \cdots & n \end{array}$$

– i-te Anleihe mit Preis P^i und Auszahlungen $Z_k^{(i)}$ im k-ten Jahr.

Gegeben seien Cashflows $C_1, \dots, C_k, \dots, C_n$, die sichergestellt werden müssen durch Auszahlungen in Jahren $1, \dots, k, \dots, n$.

Portfoliooptimierung:

$$(P): \min_{(x_i)_i} \underbrace{\sum_{i=1}^{I} P^i \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Portfolio}}}{x_i}}_{\text{Preis des Portfolios}} \quad \text{s.t.} \quad \underbrace{\sum_{i=1}^{I} Z_k^i \cdot x_i}_{\text{Cashflow des Portfolios im Jahr } k} \geq C_k \quad k = 1, \dots, n, \qquad x_i \geq 0 \quad i = 1, \dots, I$$

Diskontoptimierung:

$$(D): \max_{(d_k)_k} \underbrace{\sum_{k=1}^{n} C_k \cdot \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Diskontierungsfaktoren}}}{d_k}}_{\text{Barwert von Cashflows}} \quad \text{s.t.} \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{n} Z_k^i \cdot d_k}_{\text{Barwert der Auszahlungen von Portfolio } i} \leq P^i \quad i = 1, \dots, I, \qquad d_k \geq 0 \quad k = 1, \dots, n$$

"faire Bewertung ist konsistent mit Preisen"

Satz: Seien $(x_i)_{i=1}^{I}$ und $(d_k)_{k=1}^{n}$ Lösungen von (P) und (D).

Dann gilt:

$$\sum_{i=1}^{I} P^i \cdot x_i = \sum_{k=1}^{n} C_k \cdot d_k \quad (\text{Dualität})$$