INVESTITIONEN

Investition

I - Investition

$q \in [0,1]$ - Verbrauchsrate $\nearrow$ 1 : Verbrauch, kein Sparen; $\to$ $(0,1)$: q Verbrauch, $1-q$ Sparen; $\searrow$ 0 : kein Verbrauch, Sparen

Geldstrom: $q^0 I \to q \cdot I \to q^2 I \to \dots$

gesamtwirt. Konsequenz

Gesamtverbrauch: $\sum_{\ell=0}^{\infty} q^\ell \cdot I = I \cdot \lim_{k\to\infty} \sum_{\ell=0}^{k} q^\ell = I \cdot \frac{\overset{\to 0}{q^{k+1}} - 1}{q-1} \to \frac{I}{1-q}$ $\quad q \in (0,1)$

z.B. $q = \frac{3}{5}$, $\frac{I}{1-q} = \frac{I}{1-\frac{3}{5}} = 2{,}5 \cdot I$ ← Multiplikationseffekt einer Investition

Beurteilung der Investition

Einnahmen

E_0	E_1	E_2	…	E_n
0	1	2	…	n
A_0	A_1	A_2	…	A_n

generieren

Ausgaben

① Verzinsung der Ausgaben:

$$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} A_k \cdot q^{n-k}}_{\text{Endwert}} \qquad \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{A_k}{q^k}}_{\text{Barwert}}$$

$$\sum_{k=0}^{n} E_k q^{n-k} \qquad \sum_{k=0}^{n} \frac{E_k}{q^k}$$

② Verzinsung der Einnahmen

Kapitalwert der Investition

$$C := \sum_{k=0}^{n} \frac{E_k - A_k}{q^k} \to$$

Kapitalwertmethode

$C > 0$: Investition ist vorteilhafter als Anlage mit $i\%$

$C = 0$: Investition ist äquivalent zu eine Anlage mit $i\%$

$C < 0$: Anlage mit $i\%$ ist vorteilhafter als Investition

Beispiel: $i = 8\%$.

k	E_k	A_k
0	0	435
1	150	45
2	180	60
3	210	80
4	190	70
5	170	65

$\Rightarrow C = 27{,}967 > 0 \Rightarrow$ Investition ist vorteilhafter als Anlage zu 8%

Beispiel: Investition I

k	E_k	A_k
0	0	10
1	5	0
2	2,5	0
3	5	0

$\Rightarrow C_I = 3{,}68$

Investition II und $i = 10\%$

k	E_k	A_k
0	0	20
1	10	0
2	6	0
3	3	0
4	6	0

$\Rightarrow \underbrace{C_{II} = 4{,}01}$ > 0

- vorteilhafter als Investition I
- vorteilhafter als Anlage mit $i = 10\%$

Frage: Ist der Vergleich zinsabhängig ?

Methode des internen Zinsfußes

$$C(i_{int}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{E_k - A_k}{(1+i_{int})^k} \overset{!}{=} 0,$$ d.h. der Kapitalwert bei i_{int} ist $C(i_{int}) = 0$.

i_{int}: interner Zinsfuß oder Rendite

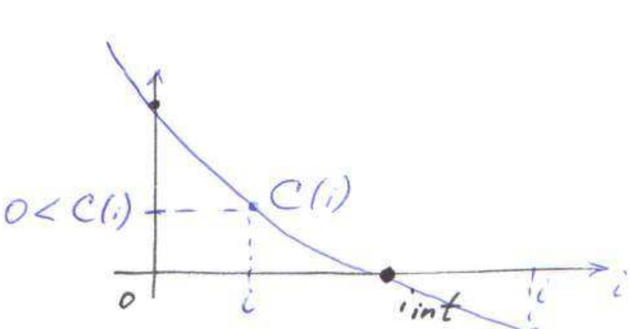
Spezialfall: Normalinvestition, d.h.
- $\underbrace{A_0}_{\text{Ausgaben}} > 0$, $A_1 := \ldots = A_n := 0$
- $E_0 := 0$, $\underbrace{E_1, \ldots, E_n}_{\text{Einnahmen}} > 0$
- $\underbrace{E_1 + \ldots + E_n > A_0}_{\text{Deckungskriterium}}$.

$$C(i) = -A_0 + \frac{E_1}{1+i} + \cdots + \frac{E_n}{(1+i)^n}$$

$$C(0) = -A_0 + E_1 + \ldots + E_n > 0, \quad \lim_{i \to \infty} C_0(i) = -A_0 < 0$$

$$C'(i) = -\frac{\overset{>0}{E_1}}{(1+i)^2} - \frac{2\overset{>0}{E_2}}{(1+i)^3} - \ldots - \frac{n\overset{>0}{E_n}}{(1+i)^{n+1}} < 0$$

$\Rightarrow$
- $C(\cdot)$ streng monoton fallend
- $C(i) = 0$ ist eindeutig lösbar (d.h. interner Zinsfuß ist eindeutig)



$i_{int} > i$: Investition vorteilhafter als Anlage mit $i\%$, $C(i) > 0$

$i_{int} = i$: Investition äquivalent zur Anlage mit $i\%$, $C(i) = 0$

$i_{int} < i$: Anlage mit $i\%$ ist vorteilhafter als Investition

Alternative Investitionsprojekte

Beispiel 1):

k	E_k	A_k
0	0	60
1	15	10
2	33	2
3	45	6

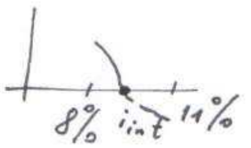
$$\Rightarrow C = -60 + \frac{15-10}{1+i} + \frac{33-2}{(1+i)^2} + \frac{45-6}{(1+i)^3} = \begin{cases} 2{,}17, & i = 8\% \\ -1{,}82, & i = 11\% \end{cases}$$

Interner Zinsfuß: $0 = -60 + \frac{5}{1+i} + \frac{31}{(1+i)^2} + \frac{39}{(1+i)^3} \Leftrightarrow$

$$60\cdot(1+i)^3 - 5(1+i)^2 - 31(1+i) - 39 = 0$$

$$+ \quad - \quad - \quad - \qquad V(f) = 1 = P(f)$$

Descartes.



$\xrightarrow{\text{z.B. Newton}}$ $i_{int} = 9{,}55\%$.

Beispiel 2): Investition I

k	E_k	A_k
0	0	100
1	80	0
2	60	0
3	10	0

Investition II

k	E_k	A_k
0	0	100
1	70	0
2	70	0
3	90	0

$$C_I(i) = -100 + \frac{80}{1+i} + \frac{60}{(1+i)^2} + \frac{10}{(1+i)^3}$$

$$i_{int}^{(I)} = 31{,}44\%$$

$$C_{II}(i) = -100 + \frac{70}{1+i} + \frac{70}{(1+i)^2} + \frac{90}{(1+i)^3}$$

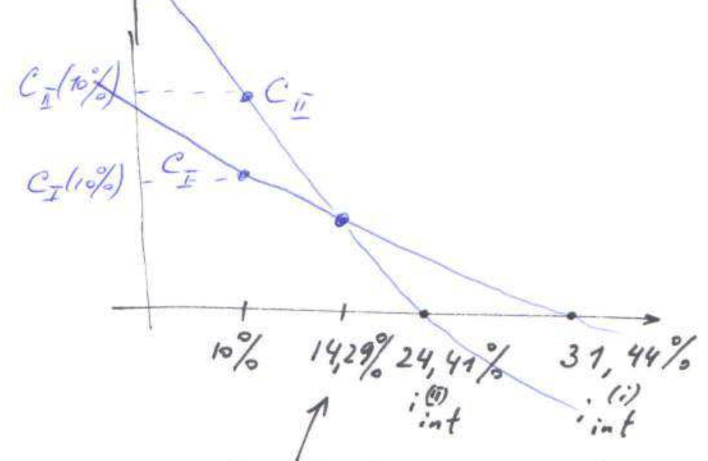
$$i_{int}^{(II)} = 24{,}41\%$$

Investition I ist vorteilhafter als Investition II ?

Aber: z.B. $i = 10\% \rightarrow C_I(10\%) = 29{,}827$

$C_{II}(10\%) = 34{,}560$

Investition II ist vorteilhafter als Investition I?



"kritischer Zinssatz"

Beispiel 3): Investition III

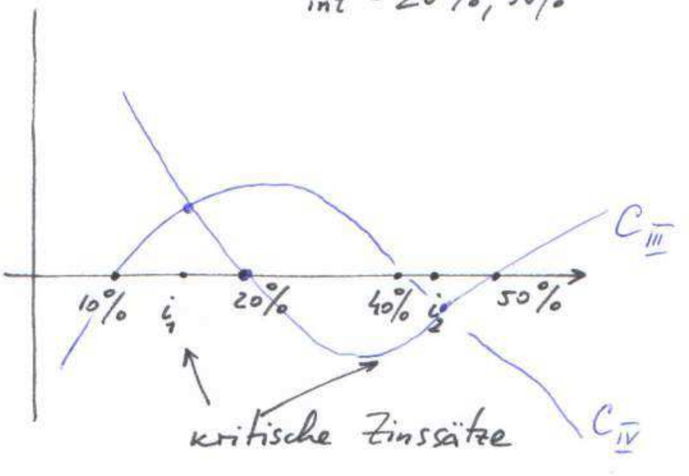
k	E_k	A_k
0	1000	0
1	0	2700
2	1800	0

$$i_{int}^{(III)} = 20\%,\ 50\%$$

Investition IV

k	E_k	A_k
0	0	1000
1	2500	0
2	0	1540

$$i_{int}^{(IV)} = 10\%,\ 40\%$$



$$\left.\begin{array}{l} i_1 = 15{,}86\,\% \\ i_2 = 44{,}14\,\% \end{array}\right\} C_{III} \stackrel{!}{=} C_{IV}$$

i	
0 … 15,86	III > IV, beide gut
15,86 … 40	IV > III, beide gut
40, … 50	beide schlecht
50, …	III vorteilhafter als IV und gut.