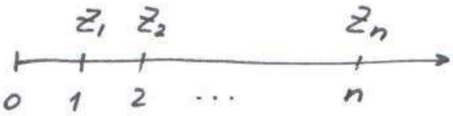
Kurs und Kurswert

Wertpapier generiert den Geldstrom:



$$P = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{(1+i)^k}$$ – Kurswert / fairer Preis

i – Zinssatz

P – Barwert der Zahlungen

$$C = \frac{P}{N} \cdot 100\%$$ – Kurs in %

N – Nominalwert / Nennwert

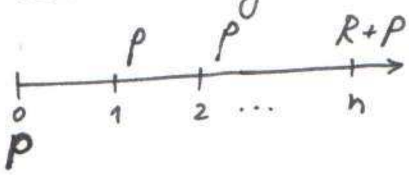
Endfällige Anleihe

Nennwert: $N = 100$

Kupon: $p := p_{nom}$ = jährliche Zinsen

Rückzahlung: R

$$z_1 = z_2 = \dots = z_{n-1} = p, \; z_n = R + p$$



Kurswert:

$$P = \underbrace{p \cdot \frac{q^n - 1}{q^n (q-1)}}_{\text{nachschüssige Rente } p} + \underbrace{\frac{R}{q^n}}_{\text{Rückzahlung } R} = \frac{1}{q^n}\left[p \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} + R\right]$$

abgezinst auf 0.

Kurs:

$$C = \frac{P}{100} \cdot 100\% = P\,\%.$$

Beispiel: $N = 100$, $p = 6{,}50\%$, $R = 102$, $i = 4{,}82\%$, $n = 5$

$$P = \frac{1}{1{,}0482^5}\left[6{,}50 \cdot \frac{1{,}0482^5 - 1}{0.0482} + 102\right] = 108{,}89\ €$$

z.B. Anleihe im Nominalwert 5000 besitzt den Kurswert:

$$50 \cdot 108{,}89 = 5444{,}50\ €$$

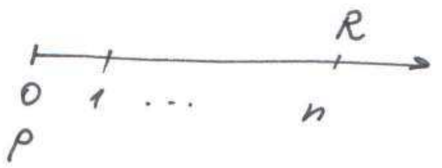
Zerobond (Null-Kupon-Anleihe)

Nennwert: 100

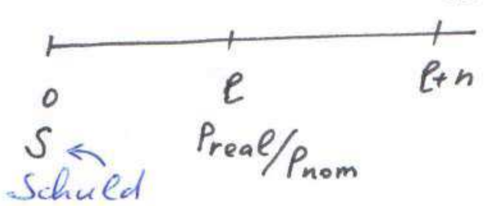
Kupon $p = 0$

Rückzahlung R

$$P = \frac{R}{q^n}.$$



Beispiel: (Schuldenrückzahlung)



$$R = S \cdot q_{nom}^{l+n}, \text{ wobei } q_{nom} = 1 + i_{nom}$$

(Anfangszinssatz)

$$P_{real} = \frac{R}{q_{real}^n} = \frac{S\, q_{nom}^{l+n}}{q_{real}^n} = S \cdot q_{nom}^{l} \cdot \left(\frac{q_{nom}}{q_{real}}\right)^n,$$

Kaufpreis der übernommenen Schuld zum Zeitpunkt l

wobei $q_{real} = 1 + i_{real}$ (Zinssatz nach dem Zeitpunkt l)

$$P_{nom} = S \cdot q_{nom}^{l}$$

$$\text{Kurs } C = \frac{P_{real}}{P_{nom}} \cdot 100\% = \frac{S\, q_{nom}^{l}}{S\, q_{nom}^{l}} \cdot \left(\frac{q_{nom}}{q_{real}}\right)^n \cdot 100 \Rightarrow C = \left(\frac{q_{nom}}{q_{real}}\right)^n \cdot 100\%.$$

- $q_{real} < q_{nom} \Rightarrow C > 100\%$: über pari
- $q_{real} = q_{nom} \Rightarrow C = 100\%$: pari
- $q_{real} > q_{nom} \Rightarrow C < 100\%$: unter pari

Beispiel: $S = 1000$, $l + n = 7$, $i_{nom} = 4\% \Rightarrow R = S \cdot 1{,}04^7 = 1315{,}93$ €

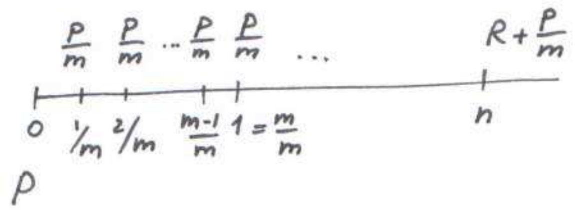
$l = 4$, $i_{real} = 6{,}5\% \Rightarrow P_{nom} = S \cdot q_{nom}^{l} = 1000 \cdot (1{,}04)^4 = 1169{,}86$ €

(Schuld nach 4 Jahren)

$$P_{real} = 1169{,}86 \cdot \left(\frac{1{,}04}{1{,}065}\right)^3 = 1\,089{,}39.$$

(reale Schuld nach 4 Jahren)

Anleihe mit unterjährigen Kuponzahlungen



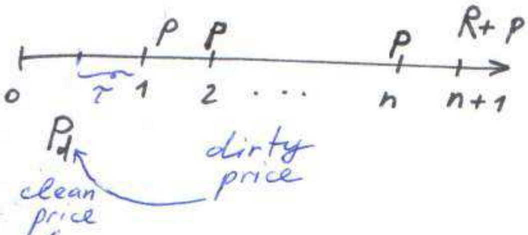
$$P = \frac{1}{\tilde{q}^{n\cdot m}}\left[\frac{p}{m}\cdot\frac{\tilde{q}^{n\cdot m}-1}{\tilde{q}-1} + R\right], \text{ wobei}$$

$\tilde{q} = 1+\tilde{i}$ ← monatlicher Zinssatz, z.B. $\frac{i}{m}$

$\tilde{i} = \frac{i}{m}$ – relativer Zinssatz

$\tilde{i} = \sqrt[m]{1+i} - 1$ – äquivalenter Zinssatz

Anleihe mit gebrochener Laufzeit



$$P_d = \underbrace{\frac{1}{q^n}\left[p\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1}+R\right]}_{\text{Abzinsen auf Zeitpunkt 1}}\cdot\frac{1}{q^{\tau}}$$

↑ Zinseszins

$P_{clean} = P_d - S$, wobei

$S = (1-\tilde{i})p$ ← Stückzinsen für den Jahresrest

$$P_d = \overbrace{\frac{1}{q_n}\left[p\cdot\frac{q^{n+1}-1}{q-1}+R\right]}\cdot\frac{1}{1+\tau\cdot i}$$

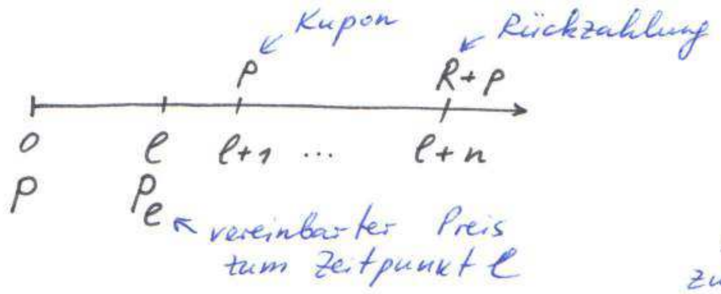
↑ Lineare Zinsen

Ewige Rente

$$P = \frac{1}{q^n}\left[p\cdot\frac{q^n-1}{q-1}+\overset{0}{R''}\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{p}{q-1} = \frac{p}{i}$$

↑ Annäherung von lang laufenden Wertpapieren

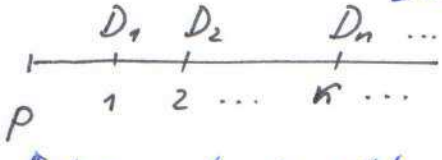
Forward Bond



$$P = \frac{1}{q^l}\left[\underbrace{\left(p\cdot\frac{q^n-1}{q-1}+R\right)\cdot\frac{1}{q^n}}_{\text{Kurswert zum Zeitpunkt } l} - P_l\right]$$

↑ Abzinsen zum Zeitpunkt Null

Aktien



← Dividenden pro Aktie

↑ Kurswert des Aktie oder Aktienkurs

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D_n}{q^k}, \text{ wobei } q = 1+i$$

↑ Zinssatz

z. B. (a) konstante Dividenden, d.h. $D_k = D \;\forall k$

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D}{q^k} = D \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q^k} = D \cdot \left(\frac{1}{q}\right)^{n+1}$$

$$= D \cdot \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{q^k} = D \left(\lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{q}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{q} - 1} - 1 \right) =$$

$$= D \cdot \left(\frac{\cancel{1} - q}{1 - q} - 1 \right) = D \cdot \frac{1}{q-1} = \frac{D}{i}.$$

(b) dynamische Dividenden, d.h.

$$D_k = D \cdot (1+s)^k$$

↑ jährliche Steigerungsrate

$$P = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D \cdot (1+s)^k}{q^k} = D \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+s}{q}\right)^k = D \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1+s}{1+i}\right)^k =$$

$$\underset{\substack{s<i \\ \text{für Konvergenz}}}{=} D \cdot \frac{1}{\frac{1+i}{1+s} - 1} = D \, \frac{1+s}{i-s}.$$

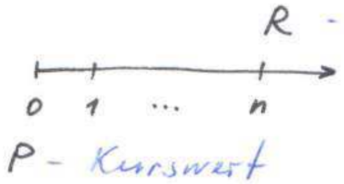
Beispiel: • $D = 2\,€$, $i = 6\,\%$ $\Rightarrow$ $P = \frac{2}{0{,}06} = 33{,}33\,€$ Aktienkurs

• $D = 1\,€$, $s = 4\,\%$, $i = 6\,\%$ $\Rightarrow$ $P = 1 \cdot \frac{1{,}04}{0{,}06 - 0{,}04} = 52\,€$ Aktienkurs

Rendite von Wertpapieren

Unter der Rendite (oder Effektivzinssatz) eines Wertpapiers versteht man denjenigen Jahreszinssatz i_{eff}, für den die Leistung des Erwerbens (d.h. Kaufpreis) äquivalent zu den Gegenleistungen der emittierenden Unternehmung (oder des Verkäufers) wird.

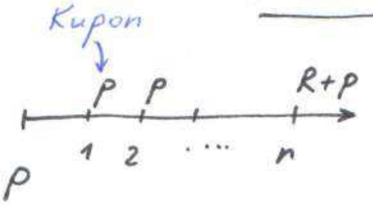
Rendite eines Zerobonds



$$P = \frac{R}{(1+i_{eff})^n} \Rightarrow i_{eff} = \sqrt[n]{\frac{P}{R}} - 1$$

Beispiel: $n = 3{,}5$ Jahre, $R = 100$, $P = 82{,}60 \Rightarrow i_{eff} = \left(\frac{100}{82{,}60}\right)^{\frac{1}{3.5}} - 1 = 0{,}0561 = 5{,}61\%$.

Rendite einer Endfälligen Anleihe



$$P = \frac{1}{q^n}\left[p \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} + R\right]$$

$$P \cdot q^n(q-1) - p \cdot q^n + p - R\cdot(q-1) = 0$$

$$f(q) := P q^{n+1} - (P+p)\, q^n - Rq + (p+R) \stackrel{!}{=} 0$$

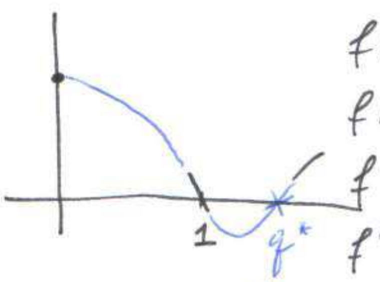
Nullstellen bestimmen

$+ \quad - \quad - \quad +$

$V(f) = 2 \Rightarrow$ Descartes

$P(f) = 2$ oder 0

aber $q = 1$ - Nullstelle



$$f(0) = p + R > 0$$

$$f(1) = 0$$

$$f'(q) = (n+1)\, P \cdot q^n - n(P+p)\, q^{n-1} - R$$

$$f'(1) = (n+1)P - n(P+p) - R = P - \underbrace{(n \cdot p + R)}_{\text{Gesamtrückzahlung}} < 0$$

Barwert Gesamtrückzahlung

gesuchte Effektivverzinsung!

Näherungsformel

$$P = \frac{1}{(1+i)^n}\left[p \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i} + R\right]$$

ÜBUNG

$$\Rightarrow \boxed{i_{eff} \approx \frac{p}{R} + \frac{R-P}{n \cdot R}}$$

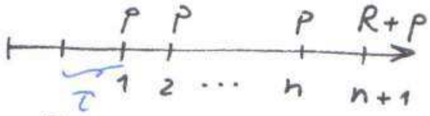
Beispiel: $P = 96$, $n = 7$ Jahre, $p = 8\%$, $R = 103$.

$$96 = \frac{1}{q^7}\left[8 \cdot \frac{q^7 - 1}{q - 1} + 103\right] \longrightarrow i_{eff} = 9{,}12\,\%.$$

z.B. Sekantenverfahren

$$i_{eff} \approx \frac{0{,}08}{1{,}03} + \frac{1{,}03 - 0{,}96}{7 \cdot 1{,}03} = 8{,}73\,\%$$

Rendite einer Anleihe mit gebrochener Laufzeit



$$P_d = \frac{1}{q^n}\underbrace{\left[p\cdot \frac{q^{n+1}-1}{q-1} + R\right]}_{\text{Abzinsen auf Zeitpunkt 1}}\cdot \frac{1}{q^{\tau}}$$

↑ Zinseszins

$P_d - S =: P_{clean}$

$S = (1-\tau)\cdot p$ Stückzinsen

(International Security Market Association)

Beispiel: ISMA-Rendite der Anleihe mit $N = R = 100$, Restlaufzeit 4 Jahre und 7 Monate, Clean Price $P_{clean} = 102$.

Kuponzahlungen: a) jährlich $p = 6$

b) halbjährlich $\frac{p}{2} = 3$

c) vierteljährlich $\frac{p}{4} = 1{,}5$.

Zu a): $n = 4$, $\tau = \frac{7}{12}$, $1-\tau = \frac{5}{12}$, $S = (1-\tau)\cdot p = \frac{5}{12}\cdot 6 = 2{,}5$.

Ansatz: $102 + 2{,}5 = \frac{1}{q^4}\cdot\left[6\cdot \frac{q^5-1}{q-1} + 100\right]\cdot \frac{1}{q^{7/12}} \xrightarrow[\text{z.B. Newton}]{} i_{eff} = 5{,}48\%$

b): $n = 9$, $\tau = \frac{1}{6}$, $1-\tau = \frac{5}{6}$, $S = 2{,}5$.

$$102 + 2{,}5 = \frac{1}{q^9}\left[3\cdot \frac{q^{10}-1}{q-1} + 100\right]\cdot \frac{1}{q^{1/6}} \rightarrow i_{eff}^{(2)} = 2{,}75\%$$

Halbjahresrendite

$$K\cdot(1+i_{eff}) = K(1+i_{eff}^{(2)})^2 \Rightarrow i_{eff} = (1+i_{eff}^{(2)})^2 - 1 = 5{,}58$$

c): $n = 18$, $\tau = \frac{1}{3}$, $1-\tau = \frac{2}{3}$, $S = 1{,}5\cdot\frac{2}{3} = 1$.

$$102 + 1 = \frac{1}{q^{18}}\left[1{,}5\ \frac{q^{19}-1}{q-1} + 100\right]\cdot \frac{1}{q^{1/3}} \rightarrow i_{eff}^{(4)} = 1{,}38\%$$

$$\Rightarrow i_{eff} = (1+i_{eff}^{(4)})^4 - 1 = 5{,}63\%$$

Kuponzahlungen erfolgen in c), b), a) eher, also ist die Rendite höher.