Tilgungsrechnung

- Bestimmung der Rückzahlungsraten für Zinsen und Tilgung eines aufgenommenen Kapitalbeitrages, z.B. Hypothek, Kredit, Darlehen usw.

S_0 ← Kreditbetrag/Anfangsschuld

Leistung des Gläubigers

$$\underset{}{|}\!\!\longrightarrow 1 \quad 2 \quad \dots \quad n-1 \quad n \quad \text{Zeit}$$

	1	2	…	n-1	n
Zinsen:	Z_1	Z_2		Z_{n-1}	Z_n → steuerpflichtig
+ Tilgung:	T_1	T_2		T_{n-1}	T_n
= Annuität:	A_1	A_2		A_{n-1}	A_n

} Leistund des Schuldners

Annuität ← jährliche Gesamtzahlung

(i) Zinsen: $Z_K := S_{K-1} \cdot i$ (Restschuld: S_{K-1}; Zinssatz: i)

(ii) Restschuld: $S_K := S_{K-1} + \underset{\uparrow \text{ Zinsen}}{Z_K} - \underset{\uparrow \text{ Annuität}}{A_K} \quad (= S_{K-1} - T_K)$

(iii) Tilgungen: $T_1 + T_2 + \dots + T_n := S_0$

(iv) Annuitäten: $A_K := Z_K + T_K$

Äquivalenzprinzip: "Leistungen des Gläubigers = Leistungen des Schuldners"

Barwertvergleich z.z. $\boxed{S_0 = \sum_{K=1}^{n} \frac{A_K}{q^K}}$

Hauptaufgabe: Mit (i)-(iv) den Tilgungsplan erstellen!

z.z. $S_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{q^k}$

Dazu: $T_k \underset{(iv)}{=} A_k - Z_k \underset{(i)}{=} A_k - S_{k-1} i \underset{(ii)}{=} A_k - \left(S_0 - \sum_{l=1}^{k-1} T_l\right) i$

$$\Rightarrow \quad T_k = A_k - S_0 i + \sum_{l=1}^{k-1} T_l \cdot i$$

$$- \quad T_{k+1} = A_{k+1} - S_0 i + \sum_{l=1}^{k} T_l \cdot i$$

$$T_k - T_{k+1} = A_k - A_{k+1} - T_k \cdot i \Rightarrow T_{k+1} = T_k \cdot q + A_{k+1} - A_k$$

$$\Rightarrow T_k = T_{k-1} \cdot q + A_k - A_{k-1} = \dots = T_1 \cdot q^{k-1} + \sum_{i=2}^{k} (A_i - A_{i-1}) q^{k-i} \Rightarrow$$

$$T_k = -S_0 \cdot i \cdot q^{k-1} + A_1 \cdot q^{k-1} + \sum_{i=2}^{k} (A_i - A_{i-1}) q^{k-i} \Rightarrow$$

$$T_k = -S_0 i \cdot q^{k-1} + A_1 \cdot q^{k-1} + (A_2 - A_1) q^{k-2} + \dots + (A_k - A_{k-1}) \cdot q^0$$

$$T_k = -S_0 i \cdot q^{k-1} + A_1 \cdot q^{k-2} \cdot (q-1) + \dots + A_{k-1}(q-1) + A_k$$

$$T_k = -S_0 \cdot i \cdot q^{k-1} + i \cdot A_1 \cdot q^{k-2} + \dots + A_{k-1} \cdot i + A_k$$

Summiere über $k = 1, \dots, n$.

$$S_0 \underset{(iii)}{=} -S_0 \cdot i \sum_{k=1}^{n} q^{k-1} + i \cdot A_1 \cdot \sum_{k=2}^{n} q^{k-2} + i A_2 \cdot \sum_{k=3}^{n} q^{k-3} + \dots + i A_{n-1} \cdot \sum_{k=n}^{n} q^{k-n} + \sum_{k=1}^{n} A_k$$

$$S_0 = -S_0 \cdot i \cdot \sum_{k=0}^{n-1} q^k + i \cdot A_1 \sum_{k=0}^{n-2} q^k + i \cdot A_2 \cdot \sum_{k=0}^{n-3} q^k + \dots + i A_{n-1} \sum_{k=0}^{n-n} q^k + \sum_{k=1}^{n} A_k$$

$$S_0 = -S_0 \cdot i \cdot \frac{q^n - 1}{q-1} + i A_1 \frac{q^{n-1} - 1}{q-1} + i A_2 \cdot \frac{q^{n-2} - 1}{q-1} + \dots + i A_{n-1} \frac{q - 1}{q-1} + \sum_{k=1}^{n} A_k$$

$$S_0 \cdot q^n = A_1 q^{n-1} + A_2 \cdot q^{n-2} + \dots + A_{n-1} \cdot q + A_n$$

$$S_0 = \frac{A_1}{q} + \frac{A_2}{q^2} + \dots + \frac{A_{n-1}}{q^{n-1}} + \frac{A_n}{q^n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{q^k}$$

Allgemeine Tilgung

Seien Tilgungen $T_1, \dots, T_n$ mit $\sum_{k=1}^{n} T_k = S_0$ gegeben.

Dann ergibt sich:
$$S_k = S_0 - \sum_{l=1}^{k} T_l$$
$$Z_k = S_{k-1} \cdot i$$
$$A_k = Z_k + T_k$$

Beispiel: Kredit von 100.000 €, $i = 10\%$, $n = 6$

$T_3 = 20.000$, $T_4 = 30.000$, $T_6 = 50000$.

k	S_{k-1}	Z_k	T_k	A_k
1	100.000 " S_0	10.000	0	10.000
2	100.000	10.000	0	10.000
3	100.000	10.000	20.000	30.000
4	80.000	8.000	30.000	38.000
5	50.000	5.000	0	5.000
6	50.000	5.000	50.000	55.000

Gesamtfällige Schuld ohne Zinsansammlung

Seien Tilgungen $T_1 = \dots = T_{n-1} = 0$ und $T_n = S_0$ gegeben.

z. B. endfällige Kupon-Anleihe.

Dann ergibt sich:
$$S_k = S_0, \ k = 1, \dots, n-1, \ S_n = 0$$
$$Z_k = S_0 \cdot i$$
$$A_k = Z_k, \ k = 1, \dots, n-1, \ A_n = S_0(1+i)$$

Beispiel: Bundesschatzbrief mit Zinssätzen

k	1	2	3	4	5	6
$i\%$	2.5	3.0	3.5	3.75	4.5	4.75

$S_0 = 1.000$ € (Typ A)

k	S_{k-1}	Z_k	T_k	A_k
1	1.000	25	0	25
2	1.000	30	0	30
3	1.000	35	0	35
4	1.000	37,5	0	37,5
5	1.000	45	0	45
6	1.000	47,5	1000	1047,5

Gesamtfällige Schuld mit Zinssammlung

Seien Annuitäten $A_k = 0,\ k = 1, \dots, n-1,\ A_n = S_0 \cdot (1+i)^n$.

z. B. Nullkupon-Anleihe, Zerobond.

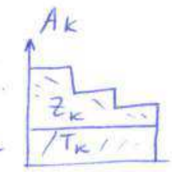
Beispiel: Bundesschatzbrief (Typ B)

$S_0 = 1.000$

k	S_{k-1}	Z_k	T_k	A_k
1	1.000	25	-25	0
2	1.025	30,75	-30,75	0
3	1.055,75	36,95	-36,95	0
4	1.092,7	40,98	-40,98	0
5	1.133,68	51,02	-51,02	0
6	1.184,70	56,27	-56,27	0
7	1.240,97	62,05	-62,05	1.303,02

Ratentilgung

Konstante Tilgungen $T_1 = T_2 = \dots = T_n = \frac{S_0}{n}$.



Dann ergibt sich:

$$S_k = S_0 - \sum_{l=1}^{k} T_l = S_0 \left(1 - \frac{k}{n}\right).$$

$$\left.\begin{aligned} Z_k &= S_{k-1} \cdot i = S_0 \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) \cdot i \\ A_k &= T_k + Z_k = = \frac{S_0}{n}\left(1 + (n-k+1) \cdot i\right) \end{aligned}\right\} \text{fallen}$$

Beispiel: $S_0 = 100.000$ €, $n = 5$, $i = 5\%$. ($\Rightarrow T_k = \frac{100.000}{5} = 20.000$ €)

k	S_{k-1}	Z_k	T_k	A_k
1	100.000	5.000	20.000	25.000
2	80.000	4.000	20.000	24.000
3	60.000	3.000	20.000	23.000
4	40.000	2.000	20.000	22.000
5	20.000	1.000	20.000	21.000

Annuitätentilgung

Konstante Annuitäten $A_k = A$, wobei nach dem Äquivalenzprinzip: $S_0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{A}{q^k} = A \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{q}\right)^k - 1 \right) = A \cdot \left(\frac{\left(\frac{1}{q}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{q} - 1} - 1 \right) = A \cdot \underbrace{\frac{q^n - 1}{q^n (1-q)}}_{= a_{\overline{n}|}}$ (nachschüssige Rente)

$\Rightarrow \quad A = S_0 \cdot \underbrace{\frac{q^n (q-1)}{q^n - 1}}_{= \frac{1}{a_{\overline{n}|}}}$ Annuitätenfaktor

Tilgungen: $T_k = A_k - Z_k = A - S_{k-1} i = A - \left(S_0 - \sum_{e=1}^{k-1} T_e\right) i$

$-\ T_{k+1} = \quad = A - \left(S_0 - \sum_{e=1}^{k} T_e\right) i$

$T_k - T_{k+1} = -T_k \cdot i \Rightarrow T_k = T_{k-1} q = \ldots = T_1 \cdot q^{k-1}; \; T_1 = A - S_0 i.$

Insgesamt: $T_k = T_1 q^{k-1}, \; T_1 = A - S_0 i \Rightarrow \boxed{T_k = (A - S_0 \cdot i) q^{k-1}}$ wachsen

Zinsen: $Z_k = A_k - T_k \Rightarrow A - T_1 q^{k-1} = Z_k \Rightarrow \boxed{Z_k = A(1-q^{k-1}) + S_0 \cdot i \cdot q^{k-1}}$ fallen

Restschuld: $S_k = S_0 - \sum_{e=1}^{k} T_e = S_0 - \sum_{e=1}^{k} \cdot T_1 \cdot q^{k-1} = S_0 - T_1 \cdot \sum_{e=1}^{k} q^{k-1}$

$= S_0 - T_1 \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1} = S_0 - (A - S_0 i) \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1} = S_0 q^k - A \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1}.$

$$\Rightarrow \boxed{S_k = S_0 \cdot q^k - A \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1}}.$$

Beispiel: $S_0 = 100.000$ €, $n = 5$, $i = 5\%$ $\left(\Rightarrow A = 100.000 \; \frac{1.05^5 \cdot 0.05}{1.05^5 - 1} = 23.097{,}48\right)$

k	S_{k-1}	Z_k	T_k	A_k
1	100.000	5.000	18.097,48	23.097,48
2	81.902,52	4.095.13	19.002,38	23.097,48
3	62.900,72	3.145.01	19.952,47	23.097,48
4	42.947,70	2.147,38	20.950,10	23.097,48
5	21.997,60	1.099,88	21.997,60	23.097,48