Renditeermittlung

Die Rendite ist im Finanzwesen der in Prozent eines Bezugswerts ausgedrückte Effektivzins, den ein Anleger innerhalb eines Jahres erzielt. Mit Hilfe der Rendite können verschieden gestaltete Finanzangebote gegenüber gestellt werden. Relevante Faktoren wie z. B. Laufzeit, Kupon- und Rückzahlungen fließen somit in die Renditeermittlung rechnerisch korrekt ein, was Finanzprodukte untereinander vergleichbar macht. Für Finanzakteure ist daher die Kenntnis der Rendite unerlässlich, woraus sich eine wichtige Problemstellung ableitet:

Wie berechnet man Renditen unterschiedlicher Finanzprodukte?

Exemplarisch betrachten wir zwei endfällige Anleihen mit folgenden Konditionen:

	Anleihe A	Anleihe B
Laufzeit n	16 Jahre	20 Jahre
Kupon p	$2,5\%$ p.a.	$1,7\%$ p.a
Rückzahlung R	100 Euro	100 Euro
Kurs P	$123,75$ Euro	$102,85$ Euro

Unterstellen wir den *Effektivzinssatz* i, so wird man alternativ zum Kauf einer Anleihe den Betrag P samt Zinsen ansparen können:

$$P \cdot (1+i)^n.$$

Die endfällige Anleihe bringt insgesamt eine Rückzahlung, sowie zwischenzeitlich zum Zinssatz i angelegte Kuponzahlungen ein:

$$R + \sum_{k=0}^{n-1} p \cdot (1+i)^k = R + p \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Gemäß dem *Äquivalenzprinzip* sollen beide Alternativen unter einer fairen Effektivverzinsung gleichwertig sein, d. h.

$$P \cdot (1+i)^n = R + p \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

Aus dieser Gleichung kann die Rendite berechnet werden. Das ist äquivalent zur Lösung des Nullstellenproblems bzgl. i:

$$P \cdot (1+i)^n \cdot i - p \cdot (1+i)^n - R \cdot i + p = 0.$$

Wir wollen das Newton-Verfahren zur Lösung solcher Nullstellenprobleme kennen lernen.

Für eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ wird das zugehörige *Nullstellenproblem* wie folgt formuliert:

$$f(x^*) = 0,$$

wobei $x^* \in \mathbb{R}$ eine Nullstelle von f bezeichnet. Wir wollen das Nullstellungsproblem *iterativ* lösen, d. h. eine Folge von approximativen Lösungen $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ konstruieren, die gegen eine Nullstelle x^* von f konvergiert:

$$x^{(k)} \to x^* \quad \text{für } k \to \infty.$$

Die Idee des *Newton-Verfahrens* zur sukzessiven Konstruktion approximativer Lösung des Nullstellenproblems besteht in der Linearisierung der Funktion f. Die Taylor-Formel erster Ordnung um die k-te Iterierte liefert:

$$f(x) \approx f\left(x^{(k)}\right) + f'\left(x^{(k)}\right) \cdot \left(x - x^{(k)}\right).$$

Wir vernachlässigen den Approximationsfehler und lösen das linearisierte Nullstellenproblem:

$$f\left(x^{(k)}\right) + f'\left(x^{(k)}\right) \cdot \left(x - x^{(k)}\right) = 0.$$

Falls die Ableitung $f'\left(x^{(k)}\right) \neq 0$ nicht verschwindet, ist die Lösung davon als die $(k+1)$-te Iterierte des Newton-Verfahrens zu nehmen:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)}, \quad k = 0, 1, \ldots$$

Für die Wohldefiniertheit des Newton-Verfahrens wird üblicherweise angenommen, dass die Ableitung von f an der Nullstelle x^* nicht verschwindet:

$$f'(x^*) \neq 0.$$

Dann verschwindet wegen der Stetigkeit die Ableitung von f an der Stelle $x^{(k)} \approx x^*$ auch nicht:

$$f'\left(x^{(k)}\right) \neq 0.$$

Aus geometrischer Sicht wird im k-ten Schritt des Newton-Verfahrens die Nullstelle $x^{(k+1)}$ der Tangente $f\left(x^{(k)}\right) + f'\left(x^{(k)}\right) \cdot \left(x - x^{(k)}\right)$ bestimmt, die sich im Punkt $x^{(k)}$ an den Graphen der Funktion f anschmiegt. Offenbar konvergiert das Newton-Verfahren nicht immer – man muß genügend nahe an einer Nullstelle starten. Man sagt auch, dass das Newton-Verfahren im Allgemeinen *lokal* konvergiert, siehe Abbildung 1.

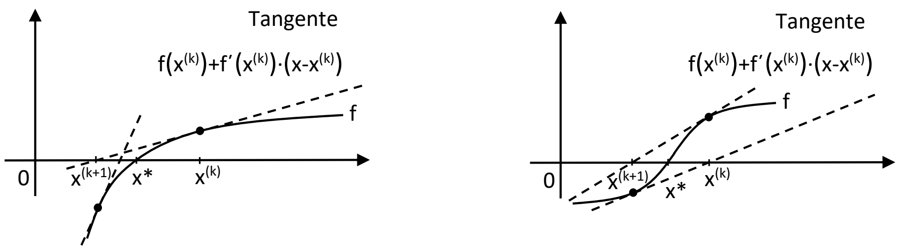

Figure 1: Newton-Verfahren

Exemplarisch wenden wir das Newton-Verfahren zur iterativen Berechnung von $\sqrt{2}$. Das ist die Nullstelle der Funktion

$$f(x) = x^2 - 2.$$

Der k-te Schritt des Newton-Verfahrens lautet:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)} = x^{(k)} - \frac{\left(x^{(k)}\right)^2 - 2}{2x^{(k)}} = \frac{x^{(k)}}{2} + \frac{1}{x^{(k)}}.$$

Diese Iterationsvorschrift zur Berechnung von $\sqrt{2}$ war in Mesopotamien bereits zur Zeit von Hammurapi I. ca. 1750 v. Chr. bekannt. Um 100 n. Chr. wurde sie von Heron von Alexandria im ersten Buch seines Werkes "'Metrica"' beschrieben. Wir führen einige Schritte des Newton-Verfahrens aus:

$x^{(0)}$	1
$x^{(1)}$	$1,5$
$x^{(2)}$	$1,\mathbf{41}66666666666$
$x^{(3)}$	$1,\mathbf{41421}56862745$
$x^{(4)}$	$1,\mathbf{41421356237}47$
$x^{(5)}$	$1,\mathbf{414213562373095}$
$\ldots$	

Nach 2 Schritten wurde die Genauigkeit von zwei, nach 3 Schritten von fünf, und nach 4 Schritten von elf Nachkommastellen erreicht. Diese Beobachtung deutet auf die *quadratische Konvergenz* der Folge $\left(x^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ gegen x^*:

$$\left|x^{(k+1)} - x^*\right| \leq C \cdot \left|x^{(k)} - x^*\right|^2,$$

wobei $C > 0$ eine positive Konstante bezeichnet. In diesem Fall verdoppelt sich die Anzahl der signifikanten Nachkommastellen in jedem Iterationsschritt. Um uns davon zu überzeugen, nehmen wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit $C \geq 1$ an und wählen den Startpunkt $x^{(0)}$ so nahe an der Nullstelle x^*, dass gilt:

$$C \cdot \left|x^{(0)} - x^*\right| \leq 0,1.$$

Dann folgt mit Hilfe der quadratischen Konvergenz:

$$\begin{aligned} \left|x^{(k+1)} - x^*\right| &\leq C \cdot \left|x^{(k)} - x^*\right|^2 \leq C \cdot \left(C \cdot \left|x^{(k-1)} - x^*\right|^2\right)^2 = C^3 \cdot \left|x^{(k-1)} - x^*\right|^4 \\ &\leq \ldots \leq C^{2^{k+1}-1} \cdot \left|x^{(0)} - x^*\right|^{2^{k+1}} \leq \left(C \cdot \left|x^{(0)} - x^*\right|\right)^{2^{k+1}} = (0,1)^{2^{k+1}}. \end{aligned}$$

Wir zeigen, dass das Newton-Verfahren die quadratische Konvergenz für zweifach stetig differenzierbare Funktionen garantiert. Dafür definieren wir die folgende Hilfsabbildung:

$$\Phi(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Das Newton-Verfahren lässt sich damit als eine *Fixpunktiteration* schreiben:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{f\left(x^{(k)}\right)}{f'\left(x^{(k)}\right)} = \Phi\left(x^{(k)}\right).$$

Wir wollen die Taylor-Formel zweiter Ordnung für Φ verwenden. Dafür berechnen wir ihren Funktionswert und ihre Ableitungen an der Nullstelle x^*:

$$\begin{aligned}
\Phi(x^*) &= x^* - \frac{f(x^*)}{f'(x^*)} = x^*, \\
\Phi'(x^*) &= \left(x - \frac{f(x)}{f'(x)} \right)' \Bigg|_{x=x^*} = 1 - \frac{\left(f'(x^*)\right)^2 - f(x^*) \cdot f''(x^*)}{\left(f'(x^*)\right)^2} = \frac{f(x^*) \cdot f''(x^*)}{\left(f'(x^*)\right)^2} = 0, \\
\Phi''(x^*) &= \left(\frac{f(x) \cdot f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} \right)' \Bigg|_{x=x^*} = f(x^*) \cdot \left(\frac{f''(x)}{\left(f'(x)\right)^2} \right)' \Bigg|_{x=x^*} + f'(x^*) \cdot \frac{f''(x^*)}{\left(f'(x^*)\right)^2} = \frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}.
\end{aligned}$$

Es gilt nun mit Hilfe der Taylor-Formel zweiter Ordnung für Φ an der Nullstelle x^*:

$$\begin{aligned}
\left| x^{(k+1)} - x^* \right| &= \left| \Phi\left(x^{(k)}\right) - \Phi(x^*) \right| \approx \left| \Phi'(x^*) \cdot \left(x^{(k)} - x^*\right) + \frac{\Phi'(x^*)}{2} \cdot \left(x^{(k)} - x^*\right)^2 \right| \\
&= \left| \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \cdot \left(x^{(k)} - x^*\right)^2 \right| \leq \left| \frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)} \right| \cdot \left| x^{(k)} - x^* \right|^2 = C \cdot \left| x^{(k)} - x^* \right|^2 .
\end{aligned}$$

Wir ermitteln die Rendite i einer endfälligen Anleihe aus der Gleichung:

$$f(i) = P \cdot (1+i)^n \cdot i - p \cdot (1+i)^n - R \cdot i + p = 0.$$

Das Newton-Verfahren liefert die Iteration:

$$i^{(k+1)} = i^{(k)} - \frac{f\left(i^{(k)}\right)}{f'\left(i^{(k)}\right)}.$$

Mit der Ableitung

$$f'(i) = n \cdot P \cdot (1+i)^{n-1} \cdot i + P \cdot (1+i)^n - n \cdot p \cdot (1+i)^{n-1} - R$$

haben wir:

$$i^{(k+1)} = i^{(k)} - \frac{P \cdot \left(1+i^{(k)}\right)^n \cdot i^{(k)} - p \cdot \left(1+i^{(k)}\right)^n - R \cdot i^{(k)} + p}{n \cdot P \cdot \left(1+i^{(k)}\right)^{n-1} \cdot i^{(k)} + P \cdot \left(1+i^{(k)}\right)^n - n \cdot p \cdot \left(1+i^{(k)}\right)^{n-1} - R}.$$

Für beide zu vergleichende Anleihen A und B führen wir einige Newton-Iterationen mit dem Startwert $i^{(0)} = 1$ aus:

	Anleihe A	Anleihe B
$i^{(0)}$	1	1
$i^{(1)}$	$0,99999965608259140$	$0,99999957943665610$
$i^{(2)}$	$0,01996257611672059$	$0,01650606105406120$
$i^{(3)}$	$0,01996257018091080$	$0,01650605626623298$
	...	...

Die Rendite der Anleihe A beträgt etwa $1,996\,\%$, während die Anleihe B lediglich $1,651\,\%$ hergibt. Die Anleihe A ist somit als gewinnträchtiger im Vergleich zur Anleihe B einzustufen.