REGEL von DESCARTES

Zinssatz: aus Rentenrechnung

$$B_n = \frac{R(q^n - 1)}{q^n(q-1)} \Leftrightarrow B_n q^n (q-1) = R(q^n - 1)$$

$$\Leftrightarrow B_n q^{n+1} - (B_n + R) q^n + R = 0.$$

<u>Frage:</u> Wie viele <u>positive</u> Nullstellen hat $\underbrace{\text{dieses Polynom}}_{\text{beliebiges Polynom}}$ in q?

↓

<u>Regel von Descartes</u>

- lineares Polynom: $f(x) = a_1 x + a_0$, $\bar{x} := -\frac{a_0}{a_1}$

Vorzeichenwechsel: $V(f) = 1$

a_1	a_0
+	−
−	+

$\Leftrightarrow \bar{x}$ positiv $\Leftrightarrow P(f) = 1$

- quadratisches Polynom: $f(x) = a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ [o. B. d. A. teile durch a_2 $\Rightarrow V(f)$ & Nullstellen ändern sich nicht]

Also: $f(x) = x^2 + a_1 x + a_0$.

$$x_{1,2} := \frac{-a_1 \pm \sqrt{a_1^2 - 4a_0}}{2} \Rightarrow x_1, x_2 \in \mathbb{R} \text{ oder keine Nullstellen, d.h. } P(f) = 0$$

$$f(x) = (x - x_1)(x - x_2) = x^2 - (x_1 + x_2) \cdot x + x_1 \cdot x_2 \Rightarrow \begin{array}{l} a_1 = -(x_1 + x_2) \\ a_0 = x_1 \cdot x_2 \end{array}$$

(i) $a_0 > 0 \Rightarrow \underline{x_1 > 0,\ x_2 > 0}$ oder $x_1 < 0,\ x_2 < 0$ $\Rightarrow$ $\begin{array}{ccc} 1 & a_1 & a_0 \\ + & - & + \end{array}$ $V(f) = 2$

$0 \overset{!}{=} f(x) = x^2 + a_1 x + \underbrace{a_0}_{>0} \Rightarrow a_1 < 0$ $\rightarrow P(f) = 2$ oder 0

(ii) $a_0 < 0 \Rightarrow x_1 > 0,\ x_2 < 0$ oder $x_1 < 0,\ x_2 > 0$ $\Leftrightarrow$ $\begin{array}{ccc} 1 & a_1 & a_0 \\ + & + \text{ oder } - & - \end{array}$ $V(f) = 1$

$P(f) = 1$

<u>Satz</u>: Die Anzahl aller positiven Nullstellen eines reellen Polynoms ist gleich der Zahl der Vorzeichenwechsel seiner Koeffizienten oder um eine gerade natürliche Zahl kleiner als diese.

<u>Beispiel</u>: $\underset{+}{B_n q^{n+1}} \underset{-}{-(B_n+R)q^n} \underset{+}{+R} = 0 \Big\} \Rightarrow V(f) = 2 \Rightarrow P(f) = 2$ oder 0

$q := 1$ ist eine Nullstelle, somit gibt es $\underbrace{\text{eine andere Nullstelle}}_{\text{gesuchter Zinssatz!}}$

<u>Beweis</u>: o.B.d.A. $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$

$a_n \uparrow 1$ (teilen durch a_n) $\qquad a_0 \uparrow \neq 0$ (teilen durch x^m, $a_m \neq 0$)

I $\quad a_0 < 0 \Rightarrow V(f)$ ungerade $\qquad \underset{+}{a_n} \ \ldots \ \underset{-}{a_0}$

$\quad\ \ a_0 > 0 \Rightarrow V(f)$ gerade, denn

II $\quad a_0 < 0 \Rightarrow P(f)$ ungerade

$\quad\ \ a_0 > 0 \Rightarrow P(f)$ gerade

Vollständige Induktion (nach dem Grad des Polynoms n)

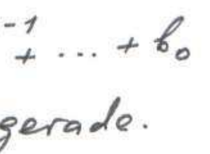
IA: $n = 1$, $n = 2$ ✓ s.o.

IAn: II gelte für Polynome vom Grad kleiner als n.

IS: Sei f - Polynom vom Grad n

- $a_0 < 0 \Rightarrow f(0) = a_0 < 0$.

  $\exists\, b > 0$ so daß $f(b) > 0$, da $a_n = 1 > 0$

  Bolzano: $\exists\, p \in (a_0, b)$ mit $f(p) = 0$.

  $g(x) := \dfrac{f(x)}{x-p}$, $\deg(g) = n-1$

  Sei b_0 der konstante Term von $g(x) = x^{n-1} + \ldots + b_0$

  Es gilt: $\underset{<0}{a_0} = -\underset{>0}{p} \cdot b_0 \Rightarrow b_0 > 0 \underset{\text{IAn.}}{\Rightarrow} P(g)$ gerade.

  $P(f) = P(g(x)\cdot(x-p)) = P(g) + 1 \Rightarrow P(f)$ ungerade

- $a_0 > 0 \Rightarrow$ entweder $P(f) = 0$ ✓

  oder $P(f) > 0 \Rightarrow \exists\, p > 0 : f(p) = 0$

  $g(x) = \dfrac{f(x)}{x-p} = x^{n-1} + \ldots + \underset{<0,\ \text{da}\ a_0 = -p \cdot b_0}{b_0} \underset{\text{IAn.}}{\Rightarrow} P(g)$ ungerade

  $\Rightarrow P(f)$ gerade

III Sei $p>0$, es gilt: $V(f(x)(x-p)) > V(f)$.

$$f(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \dots + a_1x^2 + a_0$$

($a_i \neq 0$, ansonsten analog)

$+ \longleftrightarrow \mp \longleftrightarrow -$

$$f(x)(x-p) = x^{n+1} + a_{n-1}x^n + a_{n-2}x^{n-1} + \dots + a_1x^2 + a_0x$$
$$- p x^n - a_{n-1}p x^{n-1} - \dots - a_1 p x \underbrace{- p a_0}$$

$+$, falls $a_0 < 0$

$-$, falls $a_0 > 0$

$\Downarrow$

konstante Terme haben verschiedenes Vorzeichen!

$\Downarrow$ I

gerade/ungerade

$+ \longleftrightarrow -$

$+ \quad ? \quad -$

ungerade Anzahl von Vorzeichenwechel

$$\Rightarrow V(f(x)(x-p)) \geq V(f)$$

$$V(f(x)(x-p)) > V(f) \Leftarrow$$

IV Sei $f(x) = \underbrace{N(x)}_{\text{ethält keine positiven Nullstellen}} (x-p_1)\cdot\ldots\cdot(x-p_m)$, wobei $m = P(f)$

$$\Rightarrow V(f) = V(N(x)(x-p_1)\cdot\ldots\cdot\overset{m}{(x-p_m)}) \underset{III}{>} V(N(x)(x-p_1)\cdot\ldots\cdot\overset{m-1}{(x-p_{m-1})}) > \dots$$

$$> V(N(x)\overset{1}{(x-p_1)}) > V(\overset{0}{N(x)}) \geq 0 \Rightarrow V(f) \geq P(f) = m$$

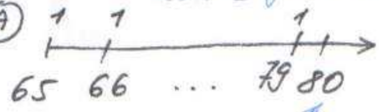
Zusammen mit I & II folgt die Behauptung. ∎

Altersrente mit / ohne Abschlag

Rente mit 65 bei 100 % oder mit 60 bei 82 % ?

Vergleiche Barwerte vom Modell A und Modell B:

Rente jährlich vorschüssig

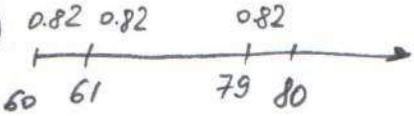
(A) 

durchschnittliche Lebenserwartung

$$B = 1\cdot\frac{q^n-1}{q^{n-1}(q-1)}$$

Abzinsen auf 60 Jahre

$$B^{(A)} = \frac{q^{15}-1}{q^{15-1}(q-1)\cdot q^5} = \frac{q^{15}-1}{q^{19}(q-1)}$$

(B) 

$$B^{(B)} = 0.82\cdot\frac{q^{20}-1}{q^{19}(q-1)}$$

z.B. $i = 6\%$

$B^{(A)} = 7{,}693$, $B^{(B)} = 9{,}969$.

		Zinssatz			
	Modell	0 %	4 %	6 %	10 %
$n=20$	A :	15	9,504	7,693	5,195
	B :	16,4	11,589	9,969	7,679
Restlaufzeit $n = 40$	A :	35	15,954	11,483	6,587
	B :	32,8	16,879	13,078	8,820

Allgemein: $n = \text{const}, \uparrow i \Rightarrow B\downarrow$ "Geld abgeben kostet mehr"

$i = \text{const}, \uparrow n \Rightarrow B\uparrow$ "es wird mehr bezahlt"

Speziell: $n = \text{const}, \uparrow i \Rightarrow$ Modell B > Modell A "die früheren Zahlungen sind mehr wert"

$i = \text{const}, \uparrow n \Rightarrow$ Modell A > Modell B "Verschiebung" "die volle Rentenhöhe macht sich bemerkbar"

$B^{(A)} \overset{!}{=} B^{(B)}$ für welche Laufzeit n?

$$\frac{1}{q^{n-1}}\cdot\frac{q^{n-5}-1}{q-1} = \frac{0.82}{q^{n-1}}\cdot\frac{q^n-1}{q-1} \Rightarrow q^n = \frac{0.18}{\frac{1}{q^5}-0.82} \Rightarrow n = \frac{\ln 0.18 - \ln\left(\frac{1}{q^5}-0.82\right)}{\ln q}$$

z.B. $q = 1{,}02 \mapsto n = 37{,}46$

$q = 1{,}03 \longmapsto n = 48.75$.

$B^{(A)} \overset{!}{=} B^{(B)}$ für welchen Zinssatz q?

$0.82\,q^n - q^{n-5} + 0{,}18 = 0$ eindeutige Lösung (Descartes)

$+ \quad - \quad + \quad \checkmark$

$q = \sqrt[5]{50/41}$.

$\nearrow$ Gleichheit $B^{(A)} = B^{(B)}$

z.B. $n = 40$, $q \approx 1{,}024$, d.h. $i = 2{,}4\%$.

Ewige Rente: $B^{(A)} = \frac{q^{n-5}-1}{q^{n-1}(q-1)} \to \frac{1}{q^4(q-1)}$; $B^{(B)} = 0.82\cdot\frac{q^n-1}{q^{n-1}(q-1)} \to 0.82\cdot\frac{q}{q-1}$

NULLSTELLENBESTIMMUNG

Zinssatz aus der Rentenrechnung

$$\overbrace{B_n q^{n+1} - (B_n+R)\cdot q^n + R}^{=f(q)} = 0$$

$+ \qquad - \qquad +$ $\overset{\text{Descartes}}{\Rightarrow}$ $\exists q^* > 0 : f(q^*) = 0$

1 - Nullstelle

2 - Vorzeichenwechsel

Wie berechnet man Nullstellen von $\underbrace{\text{Polynomen}}_{\text{stetigen Funktionen}}$?

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

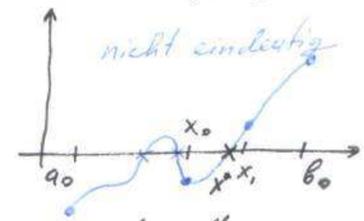
(oder differenzierbar)

- Intervallhalbierung
- Sekantenverfahren
- Newtonverfahren

Intervallhalbierung (Bisektion)

Voraussetzung: $f:[a_0,b_0]\to\mathbb{R}$ stetig, $f(a_0)\cdot f(b_0)<0$ verschiedene Vorzeichen

($\underset{\text{Bolzano}}{\Rightarrow}$ $\exists\, x^*\in(a_0,b_0)$ mit $f(x^*)=0$.)



(i) $x_i := \frac{a_i+b_i}{2}$ – Mittelpunkt von $[a_i,b_i]$

(ii) $f(x_i)\cdot f(b_i) < 0 \Rightarrow a_{i+1}:=x_i,\ b_{i+1}:=b_i$
oder $f(a_i)\cdot f(x_i) < 0 \Rightarrow a_{i+1}:=a_i,\ b_{i+1}:=x_i$
} Neue Intervallsgrenzen, die x^* enthalten.

Konvergenz: $|x_i-x^*|\le \frac{|x_{i-1}-x^*|}{2}\le\dots\le\frac{1}{2^i}\underbrace{\frac{b_0-a_0}{2}}_{=:\varepsilon}=\frac{\varepsilon}{2^i}$ "linear"

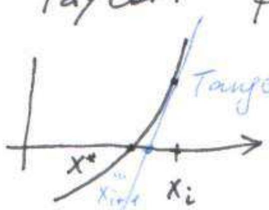
"Anfangsgenauigkeit"

Newton-Verfahren

Voraussetzung: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ diff'bar, $f(x^*)=0$, $f'(x^*)\neq 0$.

Taylor: $f(x)=\underbrace{f(x_i)+f'(x_i)\cdot(x-x_i)}_{\text{Linearisierung in } x_i}+o(|x-x_i|)$

$\overset{!}{=}0 \Rightarrow \boxed{x_{i+1}:=x_i-\frac{f(x_i)}{\underbrace{f'(x_i)}_{\neq 0,\ x_i\approx x^*}}}$



Konvergenz: $(f\in C^3)$. $\Phi(x):=x-\frac{f(x)}{f'(x)}$, d.h. $x_{i+1}=\Phi(x_i)$

$$\Phi(x^*)=x^*,\quad \Phi'(x^*)=1-\frac{1}{f'(x^*)}\cdot f'(x^*)-\left(\frac{1}{f'(x)}\right)'\underbrace{f(x^*)}_{=0}=0.$$

$$\Phi''(x^*)=\left[\frac{f(x)\cdot f''(x)}{f'(x)^2}\right]'\Bigg|_{x=x^*}\underset{f\in C^3}{=}f(x^*)\cdot\left[\dots\right]'+\frac{f'(x^*)\cdot f''(x^*)}{f'(x^*)^2}=\frac{f''(x^*)}{f'(x^*)}$$

Taylor: $x_{i+1}=\Phi(x_i)=\underbrace{\Phi(x^*)}_{x^*}+\underbrace{\Phi'(x^*)}_{=0}(x_i-x^*)+\frac{\Phi''(x^*)}{2}(x_i-x^*)^2+o(|x_i-x^*|^2)$

$$|x_i+1-x^*|\le\left|\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}\right||x_i-x^*|^2+o(|x_i-x^*|^2)$$

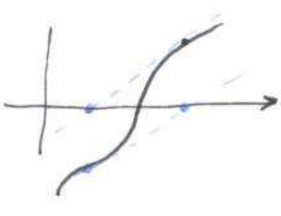
Annahme: $f''(x^*)\neq 0$, $x_i\to x^*$

$$\Rightarrow\quad \frac{|x_{i+1}-x^*|}{|x_i-x^*|^2}\le\left|\frac{f''(x^*)}{2f'(x^*)}\right|+\overset{\nearrow 0}{\frac{o(|x_i-x^*|^2)}{|x_i-x^*|^2}}\le C$$ für genügend große Indizes i.

$$\Rightarrow\quad |x_i-x^*|\le C^2\cdot|x_{i-1}-x^*|^2\le\dots\le\big(\underbrace{C\cdot|x_0-x^*|}_{=:\varepsilon<1}\big)^{2^i}=\varepsilon^{2^i}$$ "quadratisch"

"Anfangsgenauigkeit"

Lokale Konvergenz!

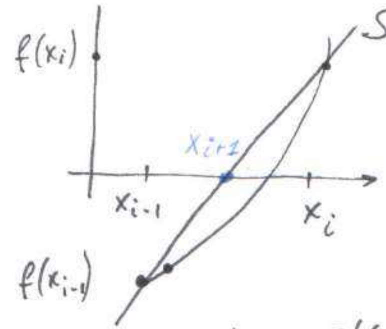


Sekantenverfahren

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) \cdot \frac{1}{f'(x_i)}$$ ← Ersetze durch Differenzenquotient $\frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}$

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) \cdot \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})}$$ - Iterierte hängt von beiden vorherigen ab!

Geometrisch:



→ löse $\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} x_i \\ f(x_i) \end{pmatrix} + (1-t) \begin{pmatrix} x_{i-1} \\ f(x_{i-1}) \end{pmatrix}$, $t \in [0,1]$

Konvergenz (ohne Beweis): $f'(x^*) \neq 0$, $f''(x^*) \neq 0$.

"superlinear" $\quad |x_i - x^*| \leq C \cdot |x_{i-1} - x^*|^p$, wobei $p = \frac{1+\sqrt{5}}{2} < 2$ (Goldener Schnitt)

Regula falsi

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) \frac{x_i - x_k}{f(x_i) - f(x_k)},$$ wobei $k < i$ der größte Index mit $f(x_k) \cdot f(x_i) < 0$.

(wie Bisektion mit Anfangswerten: $f(x_0) \cdot f(x_1) < 0$)

Konvergenz: $|x_i - x^*| \leq C \cdot |x_{i-1} - x^*|$ "linear"

Autofinanzierung

Baranzahlung: 19 999 €

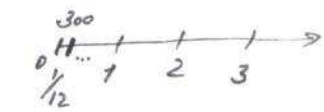
Anzahlung 9999 € & 36 (nachschüssige) Monatsraten zu je 300 €.

Welcher Effektivzinssatz liegt dem Finanzierungsangebot zugrunde?

Bei welchem Zinssatz sind die Barwerte aller Zahlungen in beiden Varianten gleich groß?

Gemäß der Preisangabenverordnung (PAngV) 2000 ist Barwertvergleich durchzuführen, wobei alle Ratenzahlungen <u>geometrisch</u> abzuzinsen sind.

$$19999 = 9999 + 300 \cdot \left[\frac{1}{q^{1/12}} + \frac{1}{q^{2/12}} + \dots + \frac{1}{q^{36/12}} \right]$$



Setze $Q = \frac{1}{q^{1/12}}$, oder $q = \frac{1}{Q^{12}}$:

$$\frac{10000}{300} = 33{,}333 = Q + Q^2 + \dots + Q^{36} = Q \cdot \frac{Q^{36} - 1}{Q - 1} \Rightarrow Q^{37} - 34{,}333\,Q + 33{,}333 = 0$$

$+ \quad - \quad +$

(Descartes ⇒ genau eine Nullstelle außer $Q = 1$)

$$f(Q) = Q^{37} - 34{,}333\,Q + 33{,}333 \overset{!}{=} 0$$

$$f'(Q) = 37Q - 34{,}333.$$

Newton: $Q_{n+1} = Q_n - \frac{f(Q_n)}{f'(Q_n)}$

Startwert: $Q_0 = 0.99$, da $q > 1$ und $q \approx 1$, $Q = \frac{1}{q^{1/12}} < 1$ und $Q \approx 1$.

n	0	1	2	3
Q_n	0.99	0.9938	0.9953	0.9958 ← $f(Q_3) = 0$.

$q = \frac{1}{Q^{12}} = \frac{1}{0{,}9958^{12}} = 1{,}0518 \Rightarrow i_{eff} = \underline{5{,}18\,\%}$

Fazit: Ist aktueller Zinssatz kleiner, wähle erste Variante, sonst die zweite Variante.

Zum Vergleich: PAngV 1985 schreibt lineare unterjährige Verzinsung mit Aufzinsung innerhalb einer Zinsperiode, d.h.

$$19999 = 9999 + \underbrace{300 \cdot \left[12 + 5{,}5\, i_{eff} \right]}_{\text{nachschüssige jährliche Rate}} \cdot \underbrace{\frac{1}{q_{eff}^3} \cdot \frac{q_{eff}^3 - 1}{q_{eff} - 1}}_{\text{Barwert für die starre Rente in 3 Jahren.}}$$

$\Rightarrow \dots \rightarrow i_{eff} = \underline{5{,}20\,\%}$