RENTENRECHNUNG

Aufgaben der Rentenrechnung:
- mehrere regelmäßig wiederkehrende Zahlungen zu einem Wert zusammenzufassen
- einen gegebenen Wert unter Beachtung anfallender Zinsen in eine bestimmte Anzahl von (Renten-)Zahlungen aufzuteilen

(starre) Rente
"gleiche Rate"
z.B. Finanzierung

dynamische Rente
"wachsende/fallende Rate"
z.B. bei Versicherungen

vorschüssige Rente
"zu Periodenbeginn zahlbar"
z.B. Sparplan, Mietzahlung

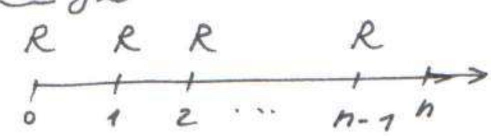
nachschüssige Rente
"zu Periodenende zahlbar"
z.B. Zurückzahlen von Krediten/Darlehen

Zeitrente
"von begrenzter Dauer"
z.B. Auszahlplan

ewige Rente
"von unbegrenzter Dauer"
z.B. Stiftungskapital/-zinsen

Vorschüssige (starre) Rente

Einzahlungen



$Rq^n \; Rq^{n-1} \; Rq^{n-2} \quad Rq$

Aufzinsen: $q := 1+i$ ← Zinssatz

$$E_n^{vor} = Rq^n + Rq^{n-1} + \ldots + Rq = Rq(1 + \ldots + q^{n-1})$$

(multipliziere mit $q-1$)

$$(q-1)\,E_n^{vor} = Rq\cdot(q^n - 1)$$

$$\boxed{E_n^{vor} = Rq\cdot\underbrace{\frac{q^n-1}{q-1}}_{\text{Rentenendwertfaktor } \ddot{s}_{\overline{n|}}}} \text{ - Endwert}$$

Abzinsen! → $B_n^{vor} = \frac{1}{q^n} E_n^{vor}$

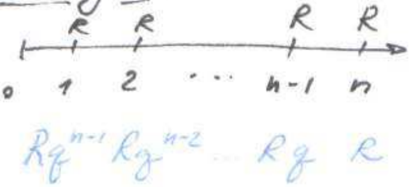
$$\boxed{B_n^{vor} = R\,\underbrace{\frac{q^n-1}{q^{n-1}(q-1)}}_{\text{Rentenbarwertfaktor } \ddot{a}_{\overline{n|}}}} \text{ - Barwert}$$

Beispiel: Über welchen Betrag müsste ein Rentner zu Rentenbeginn verfügen, damit er bei 6% Verzinsung p.a. 20 Jahre lang jährlich vorschüssig 2000 € ausgezahlt bekommt.

$$B_{20} = 2000 \cdot \frac{1{,}06^{20} - 1}{1{,}06^{19} \cdot 0{,}06} = 24\,316{,}23\,€.$$

Nachschüssige Rente

Einzahlungen



$$E_n^{nach} = R + Rq + \ldots + Rq^{n-1} = R(1 + q + \ldots + q^{n-1})$$

$$\boxed{E_n^{nach} = R\,\underbrace{\frac{q^n - 1}{q - 1}}_{\text{Rentenendwertfaktor } s_{\overline{n|}}}} \text{ - Endwert}$$

Aufzinsen: $q = 1 + i$ (Zinssatz)

Abzinsen von E_n^{nach}

$$\boxed{B_n^{nach} = R \cdot \underbrace{\frac{q^n - 1}{q^n(q-1)}}_{\text{Rentenbarwertfaktor } a_{\overline{n|}}}} \text{ - Barwert}$$

Beispiel: Es wird jeweils zu Jahresende 1200 € eingezahlt. Auf welchen Betrag sind die Einzahlungen nach 15 Jahren bei 6,5% jährlicher Verzinsung angewachsen, und welchem Barwert entspricht dieses Guthaben.

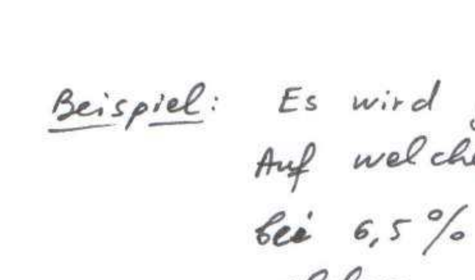
$$E_n^{nach} = 1200 \cdot \frac{1{,}065^{15} - 1}{1{,}065 - 1} = 29\,018{,}60\,€.$$

"jetzt anlegen, um E_n^{nach} zu bekommen"

$$B_n^{nach} = \frac{1}{q^n} E_n^{nach} = \frac{29\,018{,}60}{1{,}065^{15}} = 11\,283{,}20\,€$$

Vergleiche die Gesamtsumme der Einzahlungen: $1200 \cdot 15 = 18000\,€$.

Allgemeine Zeitwerte



$$K_t = \underbrace{R \cdot \ddot{s}_{\overline{t|}}}_{\text{Aufzinsen}} + \underbrace{R \cdot \ddot{a}_{\overline{n-t|}}}_{\text{Abzinsen}} = R\left(q \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} + \frac{q^{n-t} - 1}{q^{n-t-1}(q-1)}\right)$$

$$= R\,\frac{q \cdot q^{n-t-1} \cdot (q^t - 1) + q^{n-t} - 1}{q^{n-t-1}(q-1)} = Rq^t \cdot \frac{q^n - 1}{q^{n-1}(q-1)}$$

vorschüssig: $\boxed{K_t = R \cdot q^t \cdot \ddot{a}_{\overline{n|}}}$ - Rentenzeitwert

nachschüssig: $\boxed{K_t = R \cdot q^t \cdot a_{\overline{n|}}}$ - Rentenzeitwert

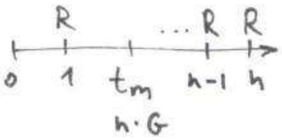
<u>Beispiel</u>: Eine über zehn Jahre laufende, jeweils am Jahresanfang zahlbare Rente von 2000 € soll verpfändet werden, um dafür in 4 Jahren eine Einzahlung zu erhalten beim Zinssatz 5%. Wie hoch ist die Einmalzahlung?

$$K_4 = Rq^4 \cdot \ddot{a}_{\overline{10}|} = 2000 \cdot 1{,}05^4 \cdot \frac{1{,}05^{10}-1}{1{,}05^{9} \cdot 0{,}05} = 19710{,}23\ € .$$

Mittlerer Zahlungstermin

Zu welchem Zeitpunkt t_m müsste alternativ zu einer Rente die Gesamtschuld gezahlt werden?

↳ In welchem Zeitpunkt ist der Zeitwert der Rente gerade gleich der Gesamtzahlung $n \cdot R$?



Barwertvergleich (nachschüssig):

$$R \cdot \frac{q^n - 1}{q^n (q-1)} = \frac{n \cdot R}{q^{t_m}} \Rightarrow \underbrace{t_m}_{\text{durchschnittliche Kapitalbindungsdauer}} = \frac{\ln \frac{n q^n (q-1)}{q^n - 1}}{\ln q}$$

Faustregel: $t_m \approx \frac{n+1}{2}$. $\boxed{\text{ÜBUNG}}$

Verdopplungsproblem

Zusätzlich zum Kapital K soll jährlich nachschüssig der Betrag $a\cdot K$ gespart werden. Nach welcher Zeit hat sich beim Zinssatz p das Gesamtvermögen verdoppelt?

Endwertvergleich: $K_t = K\cdot q^t + a\cdot K\,\frac{q^t-1}{q-1} \overset{!}{=} 2K$

$q^t = \frac{2i+a}{i+a}$, $t = \frac{\ln\left(1+\frac{i}{i+a}\right)}{\ln(1+i)}$

Sparkassenformel: $\boxed{K_n = K_0 q^n + R\cdot\frac{q^n-1}{q-1}}$

Dynamische Rente

Idee: $K_t = R \cdot \frac{e^{it}-1}{i}$ "stetige Rentenrechnung"

$$K_t' = \frac{R}{i} \cdot i e^{it} = R e^{it}$$

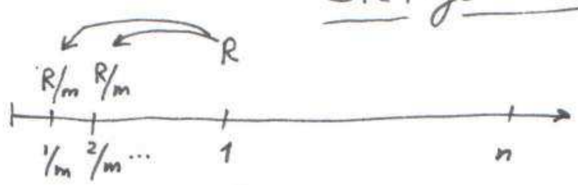
$$K_t = \frac{K_t' - R}{i}$$

$$\boxed{\underbrace{K_t'}_{\text{Kapitalzuwachs}} = \underbrace{i K_t}_{\text{Verzinsung vom Kapital}} + \underbrace{R}_{\text{Rente}}}$$ – Differentialgleichung für Rentenzeitwerte.

Was passiert im Falle der dynamischen Rente R_t ? (zeitabhängig)

DGL lösen — Struktur von R_t

Stetige Rentenrechnung



z.B. n - Jahr
m - Monat

Endwert (nachschüssig): $E_n = R \cdot \frac{q^n - 1}{q-1}$
$q := 1+i$

Zinssatz i

Unterjähriges Zinssatz: $\frac{i}{m} =: i_m$.
(relativ zu i)

$$K_n^{(m)} = \underbrace{\frac{R}{m}}_{\text{Rente}} \; \frac{\left(1+\frac{i}{m}\right)^{\overbrace{m \cdot n}^{\text{Zeit}}} - 1}{\underbrace{\frac{i}{m}}_{\text{unterjähriger Zinssatz}}}$$

$$\Big\downarrow m \to \infty$$

$$K_n = R \cdot \frac{e^{in}-1}{i}.$$

Effektivzinssatz i_{eff}:

$$R \cdot \frac{(1+i_{eff})^n - 1}{i_{eff}} \stackrel{!}{=} R \cdot \frac{e^{in}-1}{i}$$

Polynom:
$i_{eff} = 0$ Nullstelle

$$(1+i_{eff})^n - \left(\frac{e^{in}-1}{i}\right) i_{eff} - 1 \stackrel{!}{=} 0$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} i_{eff}^k - \left(\frac{e^{in}-1}{i}\right) i_{eff} - 1 = 0$$ ÜBUNG

Geometrische Rente

$b>0$ $\quad R \quad Rb \quad \dots \quad Rb^{n-1}$

$0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots \quad n$

z.B. $1+\frac{s}{100}$ Dynamisierungsfaktor

s Steigerungsrate

Endwert: $E_n = Rq^{n-1} + Rb\cdot q^{n-2} + \dots + Rb^{n-2}\cdot q + Rb^{n-1}$

(mal $q-b$)

$$\boxed{E_n = R\,\frac{q^n-b^n}{q-b}},\quad b\neq q$$

(oder $E_n = Rnq^{n-1},\ b=q$)

DGL-Ansatz: $\boxed{K_t' = iK_t + R\cdot b^{t-1}}$, $b:=e$ (für Einfachheit)

$K_t'=iK_t \Rightarrow K_t = Ce^{it}$ allgemeine Lösung, setze $K_t := C(t)e^{it}$ - Variation der Konstante

$$C'e^{it} + \cancel{C\cdot i e^{it}} = \cancel{i\cdot C e^{it}} + Re^{t-1} \Rightarrow C' = R\cdot e^{-it+t-1} \Rightarrow$$

$$C(t) = \frac{R}{1-i}e^{-it+t-1} + C_0 \Rightarrow K_t = \frac{R}{1-i}e^{t-1} + C_0 e^{it}$$

Anfangsbedingung: $K_1=R$, also $R = \frac{R}{1-i} + C_0\cdot e^{i}$, $C_0 = -\frac{Ri}{1-i}e^{-i}$

$$\boxed{K_t = \frac{R}{1-i}\left(e^{t-1} - ie^{i(t-1)}\right)}$$ „Kapitalentwicklung".

Arithmetische Rente

$R \quad R+d \quad \dots \quad R+(n-1)d$

$0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots \quad n$

Endwert: $E_n = Rq^{n-1} + (R+d)q^{n-2} + \dots + R+(n-1)d =$

$$= R\underbrace{\left(q^{n-1}+q^{n-2}+\dots+1\right)}_{=\frac{q^n-1}{q-1}} + d\underbrace{\left(q^{n-2}+2q^{n-3}+\dots+n-1\right)}_{=:S}$$

$$qS = q^{n-1}+2q^{n-2}+\dots+(n-1)q$$

$$-\quad S = q^{n-2}+\dots+(n-2)q+n-1$$

$$S(q-1) = \underbrace{q^{n-1}+q^{n-2}+\dots+q+1}_{=\frac{q^n-1}{q-1}} - n$$

$$\boxed{E_n = R\,\frac{q^n-1}{q-1} + \frac{d}{q-1}\left(\frac{q^n-1}{q-1}-n\right)}$$

DGL-Ansatz: $K_t' = iK_t + R + (t-1)d$, $K_1=R$.

Analog: $K_t = \frac{d-R}{i} - \frac{d}{i}\left(t+\frac{1}{i}\right) + \left(R+\frac{R}{i}+\frac{d}{i^2}\right)e^{i(t-1)}$

Beispiel: Dynamische Lebensversicherung und Bonus.

$R \quad Rb \quad Rb^2 \quad \dots \quad Rb^{19} \quad$ Bonus

$0 \quad 1 \quad 2 \quad \dots \quad 19 \quad 20$

- Rente 1000 € und jährlich um 5% erhöht (vorschüssig)
- Erlebensfall → Kapital + Bonus 12 000 €
- Zinssatz 3,5%, $n=20$

Welche Rendite ergibt sich?

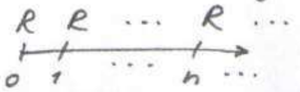
$$E_{20} = R\cdot q\,\frac{q^{20}-b^{20}}{q-b} + \text{Bonus} = 1000\cdot 1{,}035\,\frac{1{,}035^{20}-1{,}05^{20}}{1{,}035-1{,}05} + 12\,000 = 57\,782{,}12$$

Endwertvergleich: $1000\, q_{eff}\,\frac{q_{eff}^n - b^n}{q_{eff}-b} = 57\,782{,}12 \Rightarrow q_{eff}=1{,}0584$

Methoden s.o. d.h. $i_{eff}=5{,}84\%$

Ewige Rente

- nicht begrenzte Rentenzahlungen, d.h. $n \to \infty$.



Barwerte:

- vorschüssig, starr: $B_n = R \dfrac{q^n - 1}{q^{n-1}(q-1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{R \cdot q}{q-1}$

- nachschüssig, starr: $B_n = R \cdot \dfrac{q^n - 1}{q^n(q-1)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{R}{q-1}$

- nachschüssig, geometrisch: $E_n = R \cdot \dfrac{q^n - b^n}{q - b}$

$$B_n = R \cdot \frac{q^n - b^n}{q^n(q-b)} \xrightarrow[\substack{n\to\infty \\ \frac{b}{q} < 1}]{} \frac{R}{q-b}$$

- vorschüssig, geometrisch: $E_n = R \cdot q \cdot \dfrac{q^n - b^n}{q - b}$

$$B_n = R \frac{q^n - b^n}{q^{n-1}(q-b)} \longrightarrow \frac{Rq}{q-b}$$

- nachschüssig, arithmetisch: $E_n = R \dfrac{q^n - 1}{q-1} + \dfrac{d}{q-1}\left(\dfrac{q^n - 1}{q-1} - n\right)$

$$B_n = R \cdot \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)} + \frac{d}{q^n(q-1)}\left(\frac{q^n - 1}{(q-1)} - n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{R}{q-1} + \frac{d}{(q-1)^2}$$

- vorschüssig arithmetisch: $B_n = R \dfrac{q^n - 1}{q^{n-1}(q-1)} + \dfrac{d}{q^{n-1}(q-1)}\left(\dfrac{q^n - 1}{q-1} - n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \dfrac{Rq}{q-1} + \dfrac{dq}{(q-1)^2}$

Beispiel: Am 1.1.2000 stiftet man S Euro, die zu 6% angelegt werden.

a) Jeweils am Jahresende wird 500 € überreicht (als Preis). Finde S!

Nachschüssige starre Rente: $B = S = \dfrac{R}{q-1} = \dfrac{500\,€}{0.06} = 8333{,}33\,€$.

b) 500 € werden jeweils am Jahresbeginn ausbezahlt. Finde S!

Vorschüssige starre Rente: $B = S = \dfrac{R}{q-1} \cdot q = \dfrac{500 \cdot 1{,}06}{0.06} = 8833{,}33\,€$.

c) am 1.1.2002 wurde die Stiftungssumme auf 20 000 erhöht. Wie hoch ist der Preis, verliehen erstmals am 1.1.2002.

Vorschüssige starre Rente: $R = B \cdot \dfrac{q-1}{q} = 20\,000 \cdot \dfrac{0{,}06}{1{,}06} = 1132{,}08\,€$.