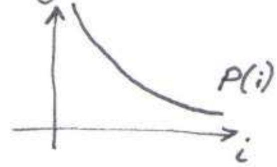
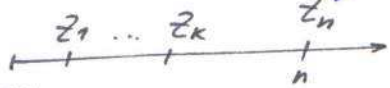
RISIKOKENNZAHLEN

Duration

- Sensitivität des Barwertes bzgl. Zinssatzänderungen.



Geldstrom: Zahlungen



$P(i)$
Barwert abhängig vom Zinssatz i

$$P(i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{(1+i)^k}$$

$$P'(i) = -\sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot z_k}{(1+i)^{k+1}} < 0 \Rightarrow P(\cdot) \text{ monoton fallend}$$

$$P''(i) = \sum_{k=1}^{n} \frac{k\cdot(k+1)\cdot z_k}{(1+i)^{k+2}} > 0 \Rightarrow P(\cdot) \text{ konvex (nach oben gekrümmt).}$$

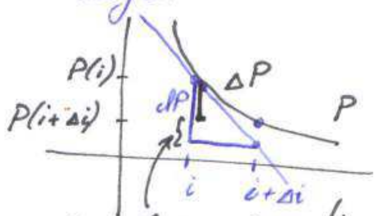
Absolute Barwertänderung

Zinssatzänderung

$$\Delta P := \underbrace{P(i+\Delta i) - P(i)}_{\text{Barwertänderung}} \sim \underbrace{P'(i)\cdot \Delta i =: dP}_{\text{Differenzial}}$$

"ungefähr/näherungsweise"

Tangente



Approximationsfehler

Relative Barwertänderung

$$\frac{P(i+\Delta i) - P(i)}{P(i)} \sim \frac{P'(i)}{P(i)} \cdot \Delta i$$

um wie viel Prozent P(i) sich ändert (relativ) wenn der Zinssatz i um einen Prozent sich vergrößert. (absolut)

Beispiele: • Anleihe: $n=3$, $N = R = 100$, $p = 5\%$, $i = 3\%$, $\Delta i = 0{,}25\%$ (Nominalwert, Rückzahlung, Kupon)

$$P(i) = \frac{5}{1{,}03} + \frac{5}{1{,}03^2} + \frac{105}{1{,}03^3} = 105{,}6572 \quad \text{(fairer Preis).}$$

$$P'(i) = \frac{-1\cdot 5}{1{,}03^2} + \frac{-2\cdot 5}{1{,}03^3} + \frac{-3\cdot 105}{1{,}03^4} = -294{,}3$$

$$dP = P'(i)\,\Delta i = -294{,}3 \cdot 0{,}0025 = -0{,}7358$$

$$P(i+\Delta i) - P(i) = P(3{,}25\%) - P(3\%) \sim -0{,}7358 \Rightarrow$$

$$\underline{104{,}9264}_{\text{exakt}} = P(3{,}25\%) \sim 105{,}6572 - 0{,}7358 = \underline{104{,}9214}$$

• Zerobond: $n=5$, $R=100$ €, $i=4{,}25\%$, $\Delta i = 0{,}25\%$.

$$\Rightarrow P = \frac{100}{1{,}0425^5} = 81{,}2119$$

$$\frac{P'(4{,}25\%)}{P(4{,}25\%)} = -\frac{1}{81{,}2119} \cdot \frac{5\cdot 100}{1{,}0425^6} = -4{,}796\,\%$$

"$i \uparrow$ um 1% $\Rightarrow$ $P\downarrow$ um 4,8%"

hier: $i \downarrow 0{,}25\%$ $\Rightarrow P \uparrow 1{,}20\%$

$$P(4{,}5\%) \underset{exakt}{=} 82{,}1927, \text{ Erhöhung um } 1{,}21\%.$$

$$-\frac{P'(i)}{P(i)} = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{k\cdot Z_k}{(1+i)^{k+1}} \Bigg/ \sum_{k=1}^{n} \frac{Z_k}{(1+i)^k}}_{\text{modifizierte Duration } D_{mod}} = \frac{1}{1+i} \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \frac{k\cdot Z_k}{(1+i)^k} \Bigg/ \sum_{k=1}^{n} \frac{Z_k}{(1+i)^k}}_{\text{(Macaulay) Duration } D}$$

vom Zinssatz i abhängig

Somit: $D_{mod} = \frac{D}{1+i} \quad \left(= -\frac{P'(i)}{P(i)} \right)$.

Interpretation von D:

1) $D = \sum_{k=1}^{n} k \cdot \left[\frac{Z_k \cdot (1+i)^{-k}}{P(i)} \right]$ – „durchschnittliche Bindungsdauer"

Barwert der k-ten Zahlung

Laufzeiten

Barwert der Zahlungsreihe

Gewichtung der Laufzeit k

2) $\underbrace{\frac{P(q+\Delta q) - P(q)}{P(q)}}_{\text{relative Barwertänderung}} : \underbrace{\frac{\Delta q}{q}}_{\text{relative Faktoränderung}} = \frac{P(q+\Delta q) - P(q)}{\Delta q} \cdot \frac{q}{P(q)} \xrightarrow[(\Delta q \to 0)]{} P'(q) \cdot \frac{q}{P(q)}$

$q = 1+i$

Elastizität des Barwertes $\mathcal{E}_P(q)$

$P(q) = \sum_{k=1}^{n} \frac{Z_k}{q^k}$

um wie viel Prozent P sich ändert (relativ), wenn das Faktor q sich um einen Prozent vergrößert (relativ)

$$\frac{P(q+0{,}01q) - P(q)}{P(q)} : \frac{0{,}01q}{q} \sim P'(q) \cdot \frac{q}{P(q)} = \mathcal{E}_P(q) \Rightarrow \frac{P(q+0{,}01q) - P(q)}{P(q)} \sim 0{,}01\,\mathcal{E}_P(q)$$

$$\mathcal{E}_P(q) = P'(q) \cdot \frac{q}{P(q)} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{k Z_k}{q^{k+1}} \cdot \frac{q}{P(q)} = -\sum_{k=1}^{n} \frac{k \cdot Z_k}{q^k} \Big/ P(q) \underset{s.o.}{=} -D.$$

$$\Rightarrow \boxed{-\mathcal{E}_P(q) = D}$$

Duration ist die Elastizität des Barwertes bzgl. des Diskontierungsfaktors bis auf Vorzeichen.

Die immunisierende Eigenschaft der Duration

$z_1 \quad z_2 \quad \ldots \quad z_K$ auf der Zeitachse $0 \quad 1 \quad 2 \cdots T \cdots n$

$$P_T(q) = q^T \cdot \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{q^k} = q^T \cdot P(q)$$

T: Zeitpunkt des Verkaufes; $P_T(q)$: Zeitwert zum Zeitpunkt T; q^T: aufzinsen auf T; $\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{q^k}$: Barwert des Geldstromes

Frage: wie ist $T = T(q)$, sodaß q das Problem:

$$\min_q P_T(q) \quad \text{löst?}$$

(in diesem Falle führen alle Änderungen des Zinssatzes und folglich des Diskontierungsfaktors q zu höheren Zeitwerten P_T)

$\|$

"Immunisierung" bzgl. Zinsänderungsrisiko.

Löse $P_T'(q) = 0$!

$$P_T'(q) = T \cdot q^{T-1} \cdot P(q) + q^T \cdot P'(q) = 0 \Rightarrow T \cdot P(q) = -q \cdot P'(q)$$

$$\Rightarrow T = -\frac{P'(q)}{P(q)} \cdot q = -\mathcal{E}_P(q)$$

(Beachte: $P_T''(q) > 0 \Rightarrow P_T(\cdot)$ - konvex)

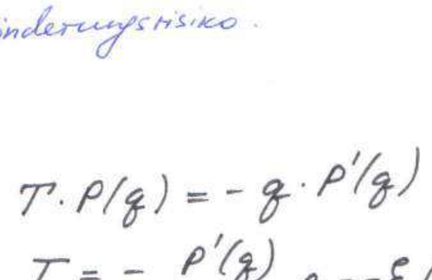
$$\underset{\text{s.o.}}{\Rightarrow} \boxed{T = D} \text{ - Duration!}$$

Beispiele: • Zahlungen $10 \quad 10 \quad 110$ zu den Zeitpunkten $1 \quad 2 \quad 3$, $i = 5{,}75\,\%$

$$\Rightarrow D = \left(\frac{1 \cdot 10}{1{,}0575} + \frac{2 \cdot 10}{1{,}0575^2} + \frac{3 \cdot 110}{1{,}0575^3}\right) \Big/ \left(\frac{10}{1{,}0575} + \frac{10}{1{,}0575^2} + \frac{110}{1{,}0575^3}\right) = 2{,}75$$

Also: $T = D = 2{,}75$ Jahre

$$P_{2,75}(q) = \left(\frac{10}{q} + \frac{10}{q^2} + \frac{110}{q^3}\right) \cdot \frac{1}{q^{2,75}}$$



• Zerobond: Zahlung R zum Zeitpunkt n (Zeitachse $0 \ldots n$)

$$P(q) = \frac{R}{q^n}, \quad P'(q) = -\frac{nR}{q^{n+1}}.$$

$$D = -\mathcal{E}_P(q) = -\frac{P'(q)}{P(q)} \cdot q = \frac{n \cdot R}{q^{n+1}} \cdot \frac{q^n}{R} \cdot q = n$$

Somit gilt: $T = D = n$ Jahre

$$P_n(q) = q^n \cdot \frac{R}{q^n} = R \text{ - konstant.}$$

Konvexität

$$P(i+\Delta i) - P(i) \sim P'(i)\cdot \Delta i + \underbrace{a \cdot \Delta i^2}_{\text{quadratischer Term für bessere Approximation mit } a \in \mathbb{R}}$$

$\Rightarrow$ Ableiten nach Δi

$$P'(i+\Delta i) \sim P'(i) + 2a \cdot \Delta i$$

$$P'(i+\Delta i) - P'(i) \sim 2a\,\Delta i$$

$\Rightarrow$ Teilen durch Δi

$$\frac{P'(i+\Delta i) - P'(i)}{\Delta i} \sim 2a \quad \underset{\Delta i \to 0}{\Longrightarrow} \quad P''(i) \sim 2a \Rightarrow a \sim \tfrac{1}{2} P''(i).$$

Somit

$$\frac{P(i+\Delta i) - P(i)}{P(i)} \sim \underbrace{\frac{P'(i)}{P(i)}}_{-D_{mod}} \Delta i + \frac{1}{2} \underbrace{\frac{P''(i)}{P(i)}}_{K \text{ - Konvexität}} \cdot \Delta i^2 = -D_{mod}\,\Delta i + \frac{1}{2} K \cdot \Delta i^2$$

$$K = \frac{P''(i)}{P(i)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k\cdot(k+1)\, Z_k}{(1+i)^{k+2}} \Bigg/ \sum_{k=1}^{n} \frac{Z_k}{(1+i)^k} = \frac{1}{(i+1)^2} \sum_{k=1}^{n} k(k+1) \cdot \left[\frac{Z_k}{(1+i)^k} \Big/ P(i)\right]$$

z. B. Zerobond 

$$K = \frac{1}{(1+i)^2} \cdot n(n+1) \cdot \frac{R}{(1+i)^n} \cdot \frac{1}{R/q^n} = \frac{n\cdot(n+1)}{(1+i)^2}.$$