Vorlesung: Prof. Dr. Vladimir Shikhman
Übung: Dr. Oleg Wilfer
Professur für Wirtschaftsmathematik
Technische Universität Chemnitz

Übung 10 zur Mathematik im Investmentbanking (SS 2017)
Bewertung von Optionen

1) Es werde ein europäischer Aktiencall betrachtet mit Aktienkurs $K_0 = 140$, Strikepreis $X = 160$, Schätzungen $K_{1a} = 110, K_{1b} = 210$ für $T = 1$ und einem risikolosen Zinssatz von 10%. Man zeige, dass bei einem vom korrekten Optionspreis $P_C = 20$ abweichenden Preis (z. B. 10) ein risikoloser Gewinn erzielt werden kann.

2) Betrachtet werde ein Aktiencall in folgender Situation: Laufzeit 1 Jahr, $K_0 = 220$, aller halben Jahre verdoppele oder halbiere sich der Aktienkurs, der risikolose Zinssatz betrage pro Halbjahr 10%, pro Jahr also 21%, der Strikepreis liege bei $X = 165$. Man berechne den Wert des Calls in $t = 1$ (innerer Wert), $t = 0,5$ und $t = 0$ (Preis des Calls).

3) Gegeben sei die bekannte Optionspreisformel nach Black/Scholes:

$$\begin{aligned}
P_c &= P_{\text{Aktie}} \cdot \Phi(d_1) - S \cdot e^{-it} \cdot \Phi(d_2),\\
d_1 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\left[\ln\frac{P_{\text{Aktie}}}{S} + it + \sigma^2 \cdot \frac{t}{2}\right],\\
d_2 &= \frac{1}{\sigma\sqrt{t}}\left[\ln\frac{P_{\text{Aktie}}}{S} + it - \sigma^2 \cdot \frac{t}{2}\right],
\end{aligned}$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Normalverteilung ist (siehe Formelsammlung), P_{Aktie} - Kurs der Aktie, S - Strikepreis, i - risikoloser Zinssatz (bei kontinuierlicher Verzinsung), t - Restlaufzeit.

a) Man berechne den Optionspreis für $t = 1$, $P_{Aktie} = 220$, $S = 165$, $\sigma = 0,98$, $i = 21\%$.
b) Für $t = 1$, $P_{Aktie} = 100$, $\sigma = 0,5$, $i_{kont} = 10\%$ und verschiedene Basispreise S (z. B. $S = 200$, $S = 100$, $S = 80$, $S = 50$, $S = 10$) berechne man jeweils den Preis eines Calls und interpretiere diesen.

4) Gegeben seien drei risikobehaftete Wertpapiere, deren erwartete Renditen und Kovarianzmatrix wie folgt gegeben sind:

$$r = \begin{pmatrix} 0.05 \\ 0.1 \\ 0.15 \end{pmatrix}, \ \Sigma = \begin{pmatrix} 0.25 & 0.15 & 0.17 \\ 0.15 & 0.21 & 0.09 \\ 0.17 & 0.09 & 0.28 \end{pmatrix}.$$

Angenommen die Zielrendite beträgt $r_p = 0.12$. Stellen Sie das Portfoliooptimierungsproblem nach Markowitz auf und interpretieren Sie dieses. Wie lautet das zugehörige Lagrangeduale Optimierungsproblem?