Subjective Probabilities

Frage: Wie quantifiziert man Wahrscheinlichkeits-verteilungen, die von der persönlichen Beurteilung herrühren?

Beispiel: "Linda" (Kahnemann / Tversky) - 31, ledig, direkt, klug

Ranking bzgl. Likelihood

(a) aktiv in der feministischen Bewegung
(b) Kassiererin bei der Bank
(c) Kassiererin, die in der feministischen Bewegung aktiv ist.
\+ etc.

40%-50% : (c) wahrscheinlicher als (b)
~0% : (c) wahrscheinlicher als (a)

↯ $(c) \Rightarrow (a)$, $(c) \Rightarrow (b)$

repräsentative Beschreibung
↑
subjektive Heuristik

S - States / Zustände

$A \subseteq S$ - Ereignis

"A ist weniger wahrscheinlich als B"

(*) $$A \preccurlyeq B \iff p(A) \leq p(B) \quad \forall A, B \subseteq S$$

Existiert Wahrscheinlichkeitsverteilung $p: \mathcal{P}ot(S) \to [0,1]$ (subjective probability)

mit
- $p(S) = 1$
- $\forall A, B \subseteq S: A \cap B = \emptyset \Rightarrow p(A \cup B) = p(A) + p(B)$ Additivität

Notwendig für subjektive Wahrscheinlichkeit:

F1: $A \succcurlyeq \emptyset$

$p(A) \geq 0$ und $p(\overbrace{A \cup \emptyset}^{A}) = p(A) + p(\emptyset) \Rightarrow p(\emptyset) = 0$

F2: $S \succ \emptyset$ (d.h. $S \succcurlyeq \emptyset$ und $S \not\preccurlyeq \emptyset$)

$p(S) = 1 > p(\emptyset) = 0$

F3: $\succcurlyeq$ ist rational

F4: $\forall A \cap C = B \cap C = \emptyset$: $A \prec B \iff A \cup C \prec B \cup C$

$$p(A \cup C) \underset{A \cap C = \emptyset}{=} p(A) + p(C) < p(B) + p(C) \underset{B \cap C = \emptyset}{=} p(B \cup C).$$

Def. $\preccurlyeq$ mit F1-F4 heißt qualitative Wahrscheinlichkeit

Aber: F1-F4 sind nicht hinreichend für (*) ü

F5: $A \prec B \Rightarrow \exists\, C_1, \dots, C_m \subseteq S$ mit $\bigcup_{i=1} C_i = S$ und

$\uparrow$ wesentliches neues Axiom

p.w. disjunkt

$A \cup C_i \prec B$, $i = 1, \dots, m$ $\leftarrow$ marginal unwahrscheinliche Ereignisse

[Unter (*), also F1–F4, und zusätzlich F5:

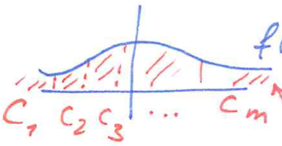
Angenommen $p(b) > 0$ für ein $b \in S$ $\Rightarrow p(b) > p(\emptyset) = 0$

Wähle C_i aus der Partition so, daß $b \in C_i \underset{F5}{\Rightarrow} \emptyset \cup C_i \prec b$

$\underset{(*)}{\Rightarrow} p(C_i) < p(b) \underset{b \in C_i}{\Rightarrow} p(b) + p(C_i \mid b) < p(b) \Rightarrow p(C_i \mid b) < 0$ ↯

Insgesamt: $p(b) = 0 \quad \forall b \in S$, insbesondere S unendlich.]

$\uparrow$ Anteil von Alternativen verschwindet



Lemma: $\succeq$ erfülle F1–F4. Dann gilt:

(a) $A \preceq B$, $C \prec D$, $B \cap D = \emptyset \Rightarrow A \cup C \prec B \cup D$ (ü)

Monotonie $\prec$ bzgl. $\subset$

(b) $A \sim B$, $C \sim D$, $A \cap C = B \cap D = \emptyset \Rightarrow A \cup C \sim B \cup D$

Monotonie $\sim$ bzgl. $\subset$

Lemma: $\succeq$ erfülle F1–F5. Dann gilt: gleichwahrscheinliche Partition

(c) $A \succ \emptyset \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N} \;\exists\, A_1, A_2, \dots, A_{2^n} \subseteq A$ mit $\bigcup_{i=1}^{2^n} A_i = A$
p.w. disjunkt
und $A_i \sim A_j \quad \forall i,j = 1, \dots, 2^n$. 2^n-Equipartition (ü)

Satz (Savage): $\succeq$ erfülle F1–F5, dann existiert Wahrscheinlichkeitsverteilung p so daß

$$A \preceq B \iff p(A) \leq p(B) \quad \forall A, B \subseteq S.$$

Beweis: Definiere $C(r, 2^n) = \left\{ \bigcup_{i \in I} A_i \;\middle|\; A_1, \dots, A_{2^n} \text{ ist eine } 2^n\text{-Equipartition und } |I| = r,\ I \subset \{1, \dots, 2^n\} \right\}$

$\swarrow$ Vereinigungen aus r Partitionsmengen

ex. nach (c) für jedes $n \in \mathbb{N}$

1. $A, B \in C(r, 2^n) \Rightarrow A \sim B$

Seien $A, B \in C(1, 2^n)$ und $A \prec B$ $\underset{(a)}{\Rightarrow} S \prec S$ ↯. Also $A \sim B$

Für $A, B \in C(r, 2^n)$, $A = \bigcup_{i \in I} A_i$, $B = \bigcup_{j \in J} B_j$ und $A_i \sim B_j \;\forall i,j \overset{(b)}{\Rightarrow} A \sim B$.

2. $A \in C(r, 2^n)$, $B \in C(r 2^m, 2^{n+m}) \Rightarrow A \sim B$

Seien $A \in C(1, 2^n)$, $B \in C(2^m, 2^{n+m}) \subset C(1, 2^n) \Rightarrow A \sim B$

Im Allgemeinen: $A \in C(r, 2^n)$, $B \in C(r 2^m, 2^{n+m}) \underset{(b)}{\overset{\text{s.o. } 1.}{\Rightarrow}} A \sim B$

3. $A\in C(r,2^n)$, $B\in C(t,2^m)$: $\quad A \precsim B \iff \frac{r}{2^n} \le \frac{t}{2^m}$.

- $\frac{r}{2^n}=\frac{t}{2^m}$, $\quad$ sei $D\in C(r2^m,2^{n+m}) = C(t2^n,2^{n+m})$

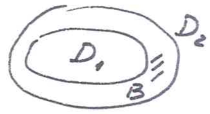
  $\underset{2.}{\Rightarrow} A\sim D$, $B\sim D \Rightarrow A\sim D$

- $\frac{r}{2^n}<\frac{t}{2^m}$, $\quad$ sei $D_1\in C(r2^m,2^{n+m})$, $D_2\in C(t2^n,2^{n+m})$ $\underset{2.}{\Rightarrow} A\sim D_1$, $B\sim D_2$

  aber $D_1 \subset D_2 \Rightarrow D_1\precsim D_2$. Also: $A < B$.

[z.z. $D_1\subseteq D_2 \Rightarrow D_1\precsim D_2$:

$B:=D_2\setminus D_1 \succsim \emptyset \underset{F4}{\Rightarrow} \underbrace{B\cup D_2\setminus B}_{D_2} \succsim \underbrace{\emptyset\cup D_2\setminus B}_{D_1}$



]

4. $\forall A\in S \quad k(A,2^n) := \sup\{r\in\mathbb{N}\cup\{0\} \mid \exists B\in C(r,2^n) \text{ mit } B\precsim A\}$

- $0\le k(A,2^n)\le 2^n$ nach Definition
- $\frac{k(A,2^n)}{2^n}$ ist monoton wachsend

$B\precsim A$, $B\in C(r,2^n)$, $B=\bigcup_{i\in I} a_i$ aus Equipartition $a_1,\dots,a_{2^n}$, $r=k(A,2^n)$

$C\precsim A$, $C\in C(s,2^{n+1})$, $C=\bigcup_{j\in J} b_j$ -‖- $b_1,\dots,b_{2^{n+1}}$, $s=k(A,2^{n+1})$

Fasse b_j p.w. zusammen als $c_\ell := b_j\cup b_{j'}$, $\ell=1,\dots,2^n$.

$\{c_1,\dots,c_{2^n}\}$ - 2^n-Equipartition, also nach 1. $a_i\sim c_\ell$ $\forall i,\ell$

Definiere $B' := \bigcup_{\ell\in L} c_\ell$ mit $c_\ell\sim a_i$, $i\in I$, $\ell\in L$ $\overset{|L|=r}{\Rightarrow}$ $B'\in C(r,2^n)$ & 1. $\quad B'\sim B\precsim A \Rightarrow B'\precsim A$

Aber $B'=\bigcup_{\ell\in L} b_{j_\ell}\cup b_{j'_\ell} \in C(2r,2^{n+1})$, $B'\precsim A$ $\Rightarrow$ $\underset{\text{Def. von } k(A,2^{n+1})}{s\ge 2r} \Rightarrow \frac{s}{2^{n+1}}\ge\frac{r}{2^n}$.

5. $\forall A\in S \quad P(A):=\sup\{\underbrace{\frac{k(A,2^n)}{2^n}}_{\substack{\text{beschränkt } \in[0,1] \\ \text{\& monoton}}}, n=0,1,\dots\} \underset{4.}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{k(A,2^n)}{2^n}$.

- $P(\emptyset)=0$, $P(S)=1$, $P(A)\ge0$. (Normierung)
- $A\precsim B \Rightarrow P(A)\le P(B)$ (Repräsentierbarkeit "⇒" in ⊛)

$k(A,2^n)=r$, d.h. $\exists C\in C(r,2^n)$, mit $C\precsim A \underset{A\precsim B}{\Rightarrow} C\precsim B$

Also: $k(B,2^n)\ge r = k(A,2^n)$ nach Definition

$$\Rightarrow \frac{k(B,2^n)}{2^n} \ge \frac{k(A,2^n)}{2^n}$$

$$\downarrow n\to\infty \qquad \downarrow n\to\infty$$

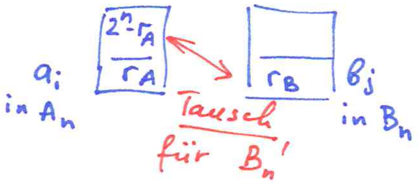
$$P(B) \ge P(A).$$

• $A\cap B=\emptyset \Rightarrow p(A\cup B)=p(A)+p(B)$ (Additivität)

$\kappa(A,2^n)=r_A$, d.h. $\exists A_n\in C(r_A,2^n)$, $A_n\preceq A$

$\kappa(B,2^n)=r_B$, d.h. $\exists B_n\in C(r_B,2^n)$, $B_n\preceq B$ o.B.d.A. $A_n\cap B_n=\emptyset$

dazu Fall 1: $r_A+r_B\le 2^n$

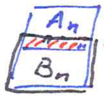


(b) $\Rightarrow B_n'\sim B_n$ und $B_n'\cap A_n=\emptyset$.

Fall 2: $r_A+r_B>2^n$

Man kann in A_n und B_n Equipartitionsmengen beliebig vertauschen.

Seien A_n, B_n maximal verschieden



- Durchschnitt $\neq\emptyset$, da $r_A+r_B>2^n$. $=:C_n\neq\emptyset$

- $A_n\prec A$ oder $B_n\prec B$ $\underset{A\cap B=\emptyset}{\overset{(a)}{\Rightarrow}}$ $\underbrace{A_n\cup B_n}_{=S}\prec A\cup B$ ↯ $A\cup B\subseteq S\Rightarrow A\cup B\preceq S$.
- $A_n\precsim A$ und $B_n\sim B$ $\underset{A\cap B=\emptyset}{\overset{(a)}{\Rightarrow}}$ $\underbrace{A_n\cup B_n\setminus C_n}_{=S}\prec A\cup B$ ↯

  $C_n>\emptyset \overset{F4}{\Rightarrow} B_n\setminus C_n\prec B_n$

Also $A_n\cap B_n=\emptyset$ o.B.d.A.

$\underset{(a),(b)}{\Rightarrow}$ $A_n\cup B_n\preceq A\cup B$ und $A_n\cup B_n\in C(r_A+r_B,2^n)\Rightarrow$

$$\frac{\kappa(A,2^n)}{2^n}+\frac{\kappa(B,2^n)}{2^n}=r_A+r_B\le\frac{\kappa(A\cup B,2^n)}{2^n}\underset{n\to\infty}{\Rightarrow} p(A)+p(B)\le p(A\cup B)\ \odot$$

Weiterhin definiere $\kappa^*(A,2^n):=\inf\{r\in\mathbb{N}\cup\{0\}\ /\ \exists B\in C(r,2^n) \text{ mit } A\preceq B\}$

Analog: • $\frac{\kappa^*(A,2^n)}{2^n}$ monoton fallend & beschränkt $\in[0,1]$.

$$p^*(A):=\inf\left\{\frac{\kappa^*(A,2^n)}{2^n},\ n=0,1,\dots\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\kappa^*(A,2^n)}{2^n}$$

• $p^*(A)+p^*(B)\ge p^*(A\cup B)$ ⊙⊙

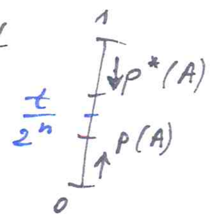
Zeige jetzt: $p^*(A)=p(A)$ [$\underset{\odot,\ \odot\odot}{\Rightarrow}$ $p(A)+p(B)=p(A\cup B)$]

"≥", da $\underbrace{\kappa^*(A,2^n)}_{s}\ge\underbrace{\kappa(A,2^n)}_{r}$

wegen: $\exists A\preceq \underline{B\in C(s,2^n)}$, $A\succeq\underline{C\in C(r,2^n)}$ $\underset{3.}{\overset{C\preceq B}{\Rightarrow}}$ $C\preceq B$ $\frac{s}{2^n}\ge\frac{r}{2^n}\Rightarrow s\ge r$

"=" Angenommen $p^*(A)>p(A)\Rightarrow\exists r\in\{0,\dots,2^n\}$, $n\in\mathbb{N}$ mit

$$\frac{\kappa^*(A,2^n)}{2^n}>\frac{t}{2^n}>\frac{\kappa(A,2^n)}{2^n}$$



Sei $B\in C(t,2^n)$, entweder $B\preceq A$ oder $B\succ A$

Falls $B\preceq A \underset{Def.}{\Rightarrow}\kappa(A,2^n)\ge t$ ↯

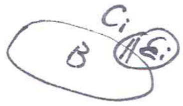
Falls $B\succ A \underset{Def.}{\Rightarrow}\kappa^*(A,2^n)\le t$ ↯ $\Rightarrow p^*(A)=p(A)$.

• $A \precsim B \Leftarrow p(A) \le p(B)$. (Repräsentierbarkeit "$\Leftarrow$" in ⊛)

Angenommen: $\underline{p(A) \le p(B)}$ und $A \succ B$

$\underset{FS}{\Rightarrow} \exists C_1, \dots, C_m$ p.w. disjunkt mit $S = \bigcup_{i=1}^{m} C_i$ und $B \cup C_i \prec A$

Setze $\mathcal{E}_{m+1} := B$ und $\mathcal{E}_i := C_i \setminus B,\ i = 1, \dots, m$



Angenommen: $\mathcal{E}_i \sim \emptyset \ \forall i = 1, \dots, m$, dann $S = \bigcup_{i=1}^{m} \mathcal{E}_i \cup B \underset{(6)}{\sim} B \prec A$ ↯

Sei $\mathcal{E} \succ \emptyset$ mit $B \cup \mathcal{E} \prec A$, $B \cap \mathcal{E} = \emptyset$

$\Downarrow$ FS $\qquad\qquad$ $\Downarrow$ Additivität

$p(\mathcal{E}) > 0$ und $\qquad p(B) + \underbrace{p(\mathcal{E})}_{>0} \le p(A) \Rightarrow \underline{p(B) < p(A)}$ ↯

$\exists D_1, \dots, D_m$ p.w. disjunkt, $S = \bigcup_{i=1}^{m} D_i$ und $\emptyset \cup D_i \prec \mathcal{E}$

$\underset{\text{Rep. in ⊛}}{\Rightarrow} p(D_i) \le p(\mathcal{E}) \Rightarrow 1 = p(S) = p\left(\bigcup_{i=1}^{m} D_i\right) \underset{\substack{\text{Additivität} \\ D_i \text{ p.w. disjunkt}}}{=} \sum_{i=1}^{m} \underbrace{p(D_i)}_{\le p(\mathcal{E})} \le m \cdot p(\mathcal{E}) \Rightarrow p(\mathcal{E}) > 0$ ■