Qualitative Beliefs

↖ Vorstellung / Glaube / Meinung

Frage: welche Vorstellungen über unsichere Umgebung entsprechen / unterstützen der Entscheidungsfindung?

Wette von Pascal: "Argument, an Gott zu glauben"

Acts/ Handlung	States/Zustand: Gott ex.		Outcomes/ Konsequent	Gott nicht ex.		Vorstellung "prior"
Glauben	∞	Himmel		$-c$	Kirche	
Nicht glauben	$-\infty$	Hölle		0	Neutralität	

Angenommen, die Wahrscheinlichkeit der Existenz Gottes sei $\varepsilon > 0$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}(\text{Glauben}) = \infty \cdot \varepsilon - c(1-\varepsilon) = (\infty + c)\cdot \varepsilon - c$$

$$\mathbb{E}(\text{Nicht glauben}) = -\infty \cdot \varepsilon + 0 \cdot (1-\varepsilon) = -\infty \varepsilon$$

"$>$"

Geldwetten (de Finetti)

$\underbrace{1, \dots, n}_{\text{States}}$, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ - Wette auf Zustände

x_i - Ein- bzw. Auszahlungen (Outcomes) falls Zustand i passiert

⊖ ⊕

Präferenzen auf Wetten $\succsim$:

(i) rational (d.h. reflexiv, vollständig, transitiv)

(ii) stetig, d.h. $\left.\begin{array}{l} x^k \to x, \quad x^k \succsim y^k \\ y^k \to y \end{array}\right\} \Rightarrow x \succsim y \qquad \forall x^k, y^k, x, y$

(iii) additiv, d.h. $x \succsim y \iff x + z \succsim y + z \quad \forall x, y, z$

(iv) monoton, d.h. $x_i \geq y_i \ \forall i = 1, \dots, n \Rightarrow x \succsim y \quad \forall x, y$

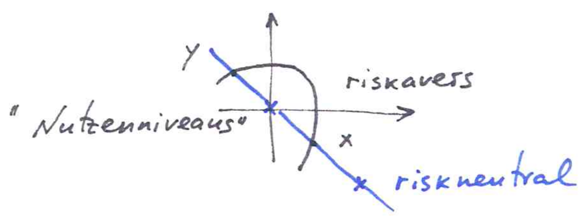
(v) nicht-trivial $\exists x, y$ so daß $x \succ y$ (d.h. $x \succsim y$, aber $y \not\succsim x$)

Additivität impliziert Risikoneutralität:

z.B. $x = (1, -1) \sim (-1, 1) = y$ "zwei Zustände sind gleichwahrscheinlich"

$z = (1, -1)$

$\Rightarrow (2, -2) \sim (0, 0)$



Satz 1: $\succsim$ auf Geldwetten ist rational, stetig, additiv, monoton und nicht-trivial genau dann, wenn es $p \in \Delta$ existiert mit

$$x \succsim y \iff \sum_{i=1}^{n} p_i x_i \geq \sum_{i=1}^{n} p_i y_i$$

subjektive Wahrscheinlichkeit = Vorstellung/Belief über Zustände/states

Beweis: "$\Leftarrow$" (ii)

"$\Rightarrow$" Definiere $A := \{x \mid x \succsim 0\}$, $B := \{x \in X \mid 0 \succ x\}$

- $A \cap B = \emptyset$ (ansonsten $0 \succ x \succsim 0 \underset{\text{transitiv}}{\Rightarrow} 0 \succ 0$ ↯ d.h. $0 \succsim x$, aber $x \not\succsim 0$.
- $A \cup B = \mathbb{R}^n$
- A abgeschlossen, B - offen (wegen Stetigkeit)

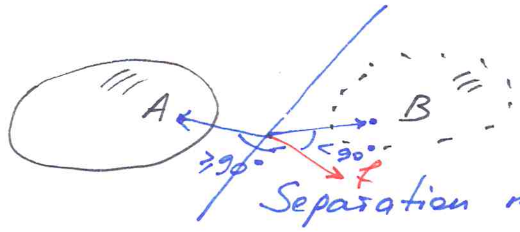
  [ang. $0 \succ x$ und $\exists x^k \to x$ mit $x^k \succsim 0 \underset{k\to\infty}{\Rightarrow} 0 \succ x \succsim 0$ ↯]
- A, B - konvex

  [$x, y \in A$, $x \succsim 0$, $y \succsim 0$ und o.B.d.A. $x \succsim y$.

  z.z. $\alpha x + (1-\alpha) y \succsim 0 \underset{\text{transitiv}}{\Leftarrow_{y \succsim 0}} \alpha x + (1-\alpha) y \succsim y$.

  $\alpha x + (1-\alpha) y \succsim y \iff \alpha x \succsim \alpha y \underset{\text{additiv}}{\iff} x \succsim y$ falls $\alpha \in \mathbb{Q}$ rational]

  dicht in $\mathbb{R}$ und stetig



Separation mit Hilfe einer Hyperebene $\{x \mid \langle f, x\rangle = c\}$, $f \in \mathbb{R}^n$

$x \in A \iff \langle f, x\rangle \geq c$ und $x \in B \iff \langle f, x\rangle < c$

- $0 \in A \Rightarrow \langle f, 0\rangle = 0 \geq c$.
- falls $c < 0$, setze $\bar{x} \succsim 0$ daß $\langle f, \bar{x}\rangle = \frac{3c}{4} \underset{\text{da } c<0}{\geq} c \Rightarrow \bar{x} \in A$

  $\langle f, 2\bar{x}\rangle = \frac{6c}{4} \underset{\text{da } c<0}{<} c \Rightarrow 2\bar{x} \in B$

  $\Rightarrow \underbrace{\bar{x} + \bar{x}}_{2\bar{x}} \succsim 0$, $2\bar{x} \prec 0$ ↯

  Also: $c = 0$
- $x \succsim y \underset{\text{additiv}}{\iff} x - y \succsim 0 \iff x - y \in A \iff \sum_{i=1}^{n} f_i x_i \geq \sum_{i=1}^{n} f_i y_i$
- Speziell: $x := e_i = (0, \dots, \underset{i\text{-te Stelle}}{1}, \dots, 0)$, $y := 0 \underset{\text{monoton}}{\Rightarrow} x \succsim y \Rightarrow f_i \geq 0$.
- $f \neq 0$, ansonsten $x \succsim y$ und $y \succsim x$ $\forall x, y$ ↯ nicht-trivial.
- $p_i := f_i / \sum_{i=1}^{n} f_i$.

Case-based Beliefs (Gilboa / Schmeidler)

Beobachtungen $x \in X$

Alternativen $a \in A$

$v(a,x)$ "Gewichtung, mit der Beobachtung x die Alternative a unterstützt"

vgl. Entscheidungsmatrix in der Pascal'schen Wette.

Erfahrung via Datenbanken: nicht-neg. ganze Zahlen

$$\mathbb{D} := \{ I : X \to \mathbb{Z}_+ \mid \sum_{x \in X} I(x) < \infty \}$$

Zähler

fast alle Beobachtungen treten nicht auf

$I(x)$ - # Beobachtung $x \in X$.

Gegeben Datenbank I, sind Präferenzen $\succsim_I$ auf Alternativen definiert, d.h. $a \succsim_I b$

"a ist besser als b unter Erfahrung I"

Def. Präferenzen $\{\succsim_I\}_{I \in \mathbb{D}}$ sind mit der Erfahrung konsistent, falls es $v : A \times X \to \mathbb{R}$ existiert, so daß

"Summe ex., da endl. Träger"

$$\forall I \in \mathbb{D}: \quad a \succsim_I b \iff \sum_{x \in X} I(x)\, v(a,x) \geq \sum_{x \in X} I(x)\, v(b,x)$$

unabhängig von I

Vorstellung "Korrelation zwischen Alternativen und Beobachtungen"

z.B. $A = X$, $v(a,x) = \mathbb{1}_{\{a=x\}} = \begin{cases} 1, & \text{falls } a=x \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$$a \succsim_I b \iff \underbrace{\sum_{x \in X} I(x)\, \mathbb{1}_{\{a=x\}} \geq \sum_{x \in I} I(x) \cdot \mathbb{1}_{\{b=x\}}}_{I(a) \;\geq\; I(b)}$$

"Empirische Häufigkeit"

a ist wahrscheinlicher als b genau dann, wenn
"more likely"
a öfter als b im Experiment vorkommt

Notwendig für Konsistenz:

Axiom **Rational**: $\succsim_I$ ist rational $\forall I \in D$ (d.h. reflexiv, vollständig und transitiv)

Axiom **Combination**:

$$\forall I, J \in \mathbb{D}, \ a, b \in A: \quad a \succsim_I b \text{ und } a \succsim_J b \Rightarrow a \succsim_{\underbrace{I+J}} b$$

Vereinigung der Datenbanken I, J

$$\text{da} \quad \sum_{x \in X} I(x)\, v(a,x) \geq \sum_{x \in X} I(x)\, v(b,x)$$

$$+ \quad \sum_{x \in X} J(x)\, v(a,x) \geq \sum_{x \in X} J(x)\, v(b,x)$$

$$\overline{\sum_{x \in X} [I(x) + J(x)]\, v(a,x) \geq \sum_{x \in X} [I(x) + J(x)]\, v(b,x)}$$

Beobachtungszähler zur Erfahrung I+J.

Axiom **Stetigkeit**:

$$\forall I, J \in \mathbb{D}, \ a, b \in A: \quad \underbrace{a \succsim_I b, \ b \not\succsim_I a}_{\text{d.h. } a \succ_I b} \Rightarrow \exists \ell \in \mathbb{N} \quad a \succ_{\ell \cdot I + J} b$$

hoch genug

Der Anteil an Erfahrung $\ell \cdot I$ überwiegt jede Erfahrung J

$$\text{da} \quad \sum_{x \in X} I(x)\, v(a,x) > \sum_{x \in X} I(x)\, v(b,x)$$

$$\text{Falls} \quad \sum_{x \in X} J(x)\, v(a,x) \geq \sum_{x \in X} J(x)\, v(b,x), \quad \text{dann fertig}$$

$<$

$$\text{Ansonsten:} \quad \ell \cdot \Big[\underbrace{\sum_{x} I(x)\, v(a,x) - \sum_{x \in X} I(x)\, v(b,x)}_{>0}\Big] > z \quad \text{beliebige positive Zahl}$$

$\exists \ell \in \mathbb{N}$

$$\text{Setze:} \quad z := \sum_{x \in X} J(x)\, v(b,x) - \sum_{x \in X} J(x)\, v(a,x) > 0$$

Umkehrung gilt unter technischen Voraussetzungen.