Risk Aversion

Frage: Sind ökonomische Agenten im Bezug auf Entscheidungen über Geld risikoavers?

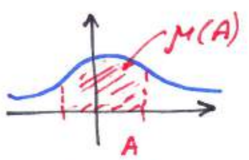
kontinuierlich

Lotterien auf $\mathbb{R}$ sind Wahrscheinlichkeitsmaße

$$\left\{ \mu : \mathcal{B} \to \mathbb{R}_+ \;\middle|\; \begin{array}{l} \cdot\ \mu(\mathbb{R}) = 1 \\ \cdot\ \mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i) \quad \forall A_i,\ i=1 \dots n \in \mathcal{B} \text{ paarweise disjunkt} \end{array} \right\}$$

Borelmengen (σ-Algebra)

z. B. $\mu(A) = \int_A f(x)\,dx \quad \forall A \in \mathcal{B}$ — Wahrscheinlichkeitsdichte von μ.



Präferenzen auf Wahrscheinlichkeitsmaßen:

Integral von u bzgl. μ

$$(*) \qquad \mu \succsim \nu \iff \mathcal{U}(\mu) \geq \mathcal{U}(\nu) \quad \text{mit} \quad \mathcal{U}(\mu) = \int u(x)\,d\mu(x)$$

"darstellbar als Erwartungsnutzen"

von Neumann-Morgenstern Erwartungsnutzen — Bernoulli-Nutzen

Existenz?

Petersburger Paradoxon:

μ: Kopf → 2 €, Zahl → K → 2^2 €, Z → K → 2^3 €, Z → …

$u(x) = x$ Geldprämie $\Rightarrow \mathcal{U}(\mu) = \int u\,d\mu = \sum_{k=1}^{\infty} 2^k \cdot \frac{1}{2^k} = \infty$

"Unendlich viel zahlen, um das Spiel spielen zu dürfen"

Ausweg: → Menge der W'maße einschränken
→ Stetigkeit von Maßen einfordern

von Neumann-Morgenstern neu beweisen!

Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ ~~stetig~~ und $g(x) \geq \varepsilon > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$.

$W_g := \left\{ u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ stetig} \;\middle|\; \sup_{x \in \mathbb{R}} \frac{|u(x)|}{g(x)} < \infty \right\}$ – Funktionen, die nicht schneller als g wachsen.

$P_g := \left\{ \mu \text{ - W'Maß auf } \mathbb{R} \;\middle|\; \int g\,d\mu < \infty \right\}$ – Maße mit endlichem g-Erwartungswert

$\mu_k \to \mu \quad W_g^*\text{-schwach} :\iff \int f\,d\mu_k \to \int f\,d\mu \quad \forall f \in W_g$

Satz: "$\succsim$" rational, W_g^*-stetig, unabhängig auf P_g $\iff$
$\exists\, u \in W_g$ so daß $\mathcal{U}(\mu) = \int u\,d\mu$ $(*)$ erfüllt,
und ist eindeutig bis auf positiv-affine Transformationen

Beachte: $\int |u|\,d\mu = \int \frac{|u|}{g} \cdot g\,d\mu \leq \underbrace{\sup \frac{|u|}{g}}_{<\infty,\ u \in W_g} \underbrace{\int g\,d\mu}_{<\infty,\ \mu \in P_g} < \infty.$

Def. Entscheider mit Bernoulli-Nutzen $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \in W_g$ heißt risikoavers, falls

$$\underbrace{\int u \, d\mu}_{\text{Erwartungsnutzen } \ \mathcal{U}(\mu)} \le \overset{\text{Nutzen}}{u}\Big(\underbrace{\int x \, d\mu}_{\text{Erwartungswert der Auszahlung}}\Big) \quad \forall \mu \in P_g \text{ - Wahrscheinlichkeitsmaß}$$

"spiele μ" "bekomme Mittelwert von μ"

Umkehrung OK

$\Leftarrow \ \Rightarrow$

insbesondere

$$\int u \, d \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \delta_{x_k} = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k x_k \int u \, d\delta_{x_k} = \underbrace{\sum_{k=1}^{K} \alpha_k u(x_k)}_{\text{Jensen-Ungl.}} \quad \underline{u\text{-konkav}}$$

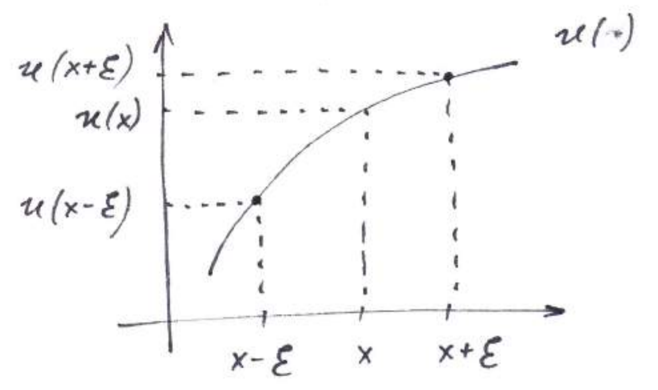
$\mu = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \delta_{x_k}$ - Punktmaß

$$\le$$

$\delta_{x_k}(A) = \begin{cases} 1, & x_k \in A \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$

$$u\Big(\int x \, d \sum_{k=1}^{K} \alpha_k \delta_{x_k}\Big) = u\Big(\sum_{k=1}^{K} \alpha_i \int x \, \delta_{x_k}\Big) = \underline{u\Big(\sum_{k=1}^{K} \alpha_k x_k\Big)}$$

Umkehrung gilt auch, da Punktmaße dicht in P_g bzgl w_g^*-Topologie sind.



Nutzen vom Gewinn Nutzen vom Verlust

$$\frac{u(x+\varepsilon) - u(x)}{\varepsilon} < \frac{u(\underset{y+\varepsilon}{x}) - u(\underset{y}{x-\varepsilon})}{\varepsilon}$$

$\downarrow \varepsilon \to 0$

$$u'(x) \le u'(y) \quad \forall y \le x$$

"Ableitung/Marginalnutzen ist fallend"

$$u''(x) < 0 \quad \forall x$$

"Krümmung ist negativ"

$$u(x) = u\Big(\frac{x+\varepsilon}{2} + \frac{x-\varepsilon}{2}\Big) \underset{\text{konkav}}{\ge} \frac{1}{2} \overbrace{u(x+\varepsilon)}^{\text{Gewinn}} + \overbrace{\frac{1}{2} u(x-\varepsilon)}^{\text{Verlust}}$$

"x sicher" "Gewinn oder Verlust mit Wahrscheinlichkeit ½"

$$u(x) = \Big[\frac{1}{2} + \pi(x,\varepsilon,u)\Big] u(x+\varepsilon) + \Big[\frac{1}{2} - \pi(x,\varepsilon,u)\Big] u(x-\varepsilon)$$

Wahrscheinlichkeits**premium**

"Gewinn mit W'keit $\frac{1}{2} + \pi(x,\varepsilon,u)$
Verlust mit W'keit $\frac{1}{2} - \pi(x,\varepsilon,u)$"

$$u \text{ ist konkav} \overset{\text{ü}}{\Longleftrightarrow} \pi(x,\varepsilon,u) \ge 0 \quad \forall x, \varepsilon$$

Anker Abweichung Nutzen

Maß für Risikoaversion

- Änderungsrate des Wahrscheinlichkeitspremiums bzgl. ε:

$$u(x) = \left[\tfrac{1}{2} + \pi(x,\varepsilon,u)\right]\cdot u(x+\varepsilon) + \left[\tfrac{1}{2} - \pi(x,\varepsilon,u)\right]\cdot u(x-\varepsilon)$$

$(\ldots)'_\varepsilon$ $$0 = \pi'\cdot u(x+\varepsilon) + \left[\tfrac{1}{2}+\pi\right] u'(x+\varepsilon) - \pi'\cdot u(x-\varepsilon) - \left[\tfrac{1}{2}-\pi\right]\cdot u'(x-\varepsilon)$$

$(\ldots)''_\varepsilon$ $$0 = \pi''\cdot u(x+\varepsilon) + \pi'\cdot u'(x+\varepsilon) + \pi'\cdot u'(x+\varepsilon) + \left[\tfrac{1}{2}+\pi\right] u''(x+\varepsilon)$$
$$- \pi'' u(x-\varepsilon) + \pi'\cdot u'(x-\varepsilon) + \pi'\cdot u'(x-\varepsilon) + \left[\tfrac{1}{2}-\pi\right]\cdot u''(x-\varepsilon)$$

$\varepsilon := 0$ $$0 = \cancel{\pi'' u(x)} + \pi'\cdot u' + \pi'\cdot u' + \left[\tfrac{1}{2} + \cancel{\pi}\right]\cdot u'' - \cancel{\pi'' u(x)} + \pi'\cdot u' + \pi'\cdot u' + \left[\tfrac{1}{2} - \cancel{\pi}\right] u''$$

$$0 = 4\pi'\cdot u' + u'' \Rightarrow 4\cdot\pi'(x,0,u) = -\frac{u''}{u'} =: r_A(x,u)$$

W'premium wächst in ε.

Arrow-Pratt Koeffizient der Risikoaversion von $u(\cdot)$

- $r_A(x,u) = -\frac{u''}{u'} \geq 0$, falls u - monoton wachsend und konkav
- $r_A(x, \underset{>0}{b}\, u + \underset{\in\mathbb{R}}{a}) = -\frac{(bu+a)''}{(bu+a)'} = -\frac{b\cdot u''}{b\cdot u'} = -\frac{u''}{u'} = r_A(x,u)$ - Invarianz.

positive lineare Transformation

Vergleich von Agenten:

$u_1(\cdot)$ risikoaverser als $u_2(\cdot) :\Leftrightarrow r_A(x,u_1) \geq r_A(x,u_2)\ \forall x$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\pi(x,\varepsilon,u_1) \geq \pi(x,\varepsilon,u_2)}_{\text{W'premium ist "monoton" in } u}\ \forall x,\varepsilon\ (*)$$

"$\Leftarrow$" $$\underbrace{\pi'(x,0,u_1)}_{=\frac{1}{4}r_A(x,u_1)} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\pi(x,\varepsilon,u_1) - \overset{0}{\overset{\|}{\pi(x,0,u_1)}}}{\varepsilon} \overset{(*)}{\geq} \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\pi(x,\varepsilon,u_2) - \pi(x,0,u_2)}{\varepsilon} = \underbrace{\pi'(x,0,u_2)}_{=\frac{1}{4}r_A(x,u_2)}$$

"$\Rightarrow$" Ü

Vergleich von Reichtumsniveaus:

$u(\cdot)$ zeigt fallende Risikoaversion auf $\Leftrightarrow \overbrace{r_A(x,u) \geq r_A(y,u)}^{\text{fallend in } x}\ \forall x\leq y$

"Reiche nehmen mehr Risiko auf sich"

$\Leftrightarrow \pi(x,\varepsilon,u) \geq \pi(y,\varepsilon,u)\ \forall x\leq y, \varepsilon\geq 0.$

W'premium ist fallend in x

Setze $u_1(z) := u(x+z)$, $u_2(z) := u(y+z)$

$r_A(z,u_1) = r_A(x+z,u)$

$r_A(z,u_2) = r_A(y+z,u)$ $\quad \underset{z:=0}{\Rightarrow} r_A(x,u) = \boxed{r_A(0,u_1) \geq r_A(0,u_2)} = r_A(y,u)$

$\pi(0,\varepsilon,u_1) = \pi(x,\varepsilon,u)$, da $\underbrace{u(x)}_{u_1(0)} = \left[\tfrac{1}{2} + \underbrace{\pi(x,\varepsilon,u)}_{\pi(0,\varepsilon,u_1)}\right]\underbrace{u(x+\varepsilon)}_{u_1(\varepsilon)} + \left[\tfrac{1}{2} - \underbrace{\pi(x,\varepsilon,u)}_{\pi(0,\varepsilon,u_1)}\right]\underbrace{u(x-\varepsilon)}_{u_1(-\varepsilon)}$

$\pi(0,\varepsilon,u_2) = \pi(y,\varepsilon,u)$

Also: $\pi(x,\varepsilon,u) = \boxed{\pi(0,\varepsilon,u_1) \geq \pi(0,\varepsilon,u_2)} = \pi(y,\varepsilon,u)$