Expected utility (von Neumann-Morgenstern)

↑ Erwarteter Nutzen

Frage: Wie vergleicht man zufällige Alternativen?

"objektive Wahrscheinlichkeiten" (d.h. gegeben)

Consequences/Outcomes : $1, \dots, n$

Wahrscheinlichkeitsverteilungen: $\underbrace{(p_1, \dots, p_n)}_{=:p} \in \Delta$ mit $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, $p_i \in [0,1]$

$=: p$ Lotterie, z.B.:

	Preise		
	25€	5€	0€
$p =$	(0 ,	1 ,	0)
$p' =$	(0.1 ,	0.89 ,	0.01)

Was ist besser?

Relation auf Lotterien aus Δ:

(i) reflexiv: $p \succsim p \quad \forall p \in \Delta$

(ii) vollständig: $p \succsim r$ oder $r \succsim p \quad \forall p, r \in \Delta$

(iii) transitiv: $p \succsim r$ und $r \succsim s \Rightarrow p \succsim s \quad \forall p, r, s \in \Delta$

} rationale Präferenzen

(iv) stetig: $\forall\, p \succsim r \succsim s \quad \exists \alpha \in [0,1]$ mit $\alpha \cdot s + (1-\alpha) p \sim r$

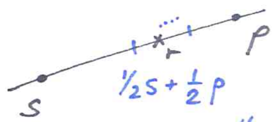
"indifferent"

z.B. p - 1€
r - 0€
s - Tod

$\Rightarrow \quad \alpha s + (1-\alpha) p \sim r$

$\exists \alpha$ "α Tod und $(1-\alpha)$ 1€ ist gleichbedeutend mit 0€."

↑ sehr klein!



"Intervallschachtelung"

Riskiere Tod, um 1€ zu gewinnen. } → Zeitung auf der anderen Straßenseite kaufen.

(v) unabhängig (von irrelevanten Alternativen):

$$\left[p \succsim r \iff \alpha p + (1-\alpha) s \succsim \alpha r + (1-\alpha) s \right] \quad \forall \alpha \in [0,1], \quad p, r, s \in \Delta$$

① Vergleiche p und r

② Vergleiche: Nature $\xrightarrow{\alpha} p$, $\xrightarrow{1-\alpha} s$ oder Nature $\xrightarrow{\alpha} r$, $\xrightarrow{1-\alpha} s$

s ist irrelevant ⓐ Nature $\xrightarrow{\alpha}$ Vergleiche p und r, $\xrightarrow{1-\alpha} s$

dynamisch konsistent

ⓑ Vergleiche p und r verbindlich und Nature $\xrightarrow{\alpha}$ Realisiere Vergleich p oder r, $\xrightarrow{1-\alpha} s$

↑ Reihenfolge anders

Satz (Expected Utility Theorem):

Axiome (i)-(v) sind für $\succsim$ auf Lotterien erfüllt

$\Longleftrightarrow$ EINDEUTIG (ü)

Existieren $\underbrace{u_1, \dots, u_n}_{\text{Nutzen der Konsequenzen}} \in \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft:

$$p \succsim p' \iff \underbrace{\sum_{i=1}^n u_i \cdot p_i}_{\text{expected utility}} \geq \sum_{i=1}^n u_i \cdot p_i' \quad \forall p, p' \in \Delta$$

($\succsim$ ist repräsentierbar durch Erwartungsnutzen

d.h. $p \succsim p' \iff U(p) \geq U(p')$, wobei $U(p) = \sum_{i=1}^n u_i \cdot p_i$)

Beweis: "$\Leftarrow$" (ü)

"$\Rightarrow$" $e_1, \dots, e_n \in \Delta$ sind sichere Verteilungen $e_i = (0, \dots, 0, \overset{i\text{-te Stelle}}{1}, 0, \dots, 0)$

Wegen (i)-(iii) sortiere o.B.d.A. $e_n \succsim \dots \succsim e_1$ und $e_n \succ e_1$

Definiere $p(\alpha) := \alpha e_n + (1-\alpha) e_1$ für $\alpha \in [0,1]$.

Es gilt: $p(1) = e_n \succsim e_i \succsim e_1 = p(0) \underset{(iv)}{\Rightarrow} \exists \alpha_i$ mit $p(\alpha_i) \sim e_i$

Hilfsbehauptung: (A) $p \succ r$ und $\alpha, \beta \in [0,1]$: (ü) mit (v)

$$\alpha p + (1-\alpha) r \succsim \beta p + (1-\beta) r \iff \alpha \geq \beta.$$

$\Rightarrow$ • α_i ist eindeutig, ansonsten $\alpha_i e_n + (1-\alpha_i) e_1 \sim e_i \sim \beta e_n + (1-\beta) e_1$

und $e_n \succ e_1$ $\underset{(A)}{\Rightarrow}$ $\alpha_i \geq \beta$ und $\beta \geq \alpha_i$ ✓

• $1 = \alpha_n \geq \dots \geq \alpha_i \geq \alpha_{i-1} \geq \dots \geq \alpha_1 = 0$, denn

$e_i \sim \alpha_i e_n + (1-\alpha_i) e_1 \succsim \alpha_{i-1} e_n + (1-\alpha_{i-1}) e_1 \sim e_{i-1} \underset{(A)}{\Rightarrow} \alpha_i \geq \alpha_{i-1}$ ✓

Setze somit $u(e_i) := \alpha_i$ und für $p = \underbrace{\sum_{i=1}^n p_i \cdot e_i}_{\text{eindeutige Darstellung}} \in \Delta$

Lineare Fortsetzung auf Δ $\rightarrow$ $u(p) := \sum_{i=1}^n p_i \cdot \alpha_i$

u_i aus der Behauptung!

• $e_i \sim p(\alpha_i) \underset{(v)}{\Rightarrow} p = \sum_{i=1}^n p_i e_i \sim \sum_{i=1}^n p_i \cdot p(\alpha_i) = \sum_{i=1}^n p_i (\alpha_i e_n + (1-\alpha_i) e_1) =$

Konvexkombination

$$= \sum_{i=1}^n (p_i \cdot \alpha_i) e_n + \sum_{i=1}^n (p_i (1-\alpha_i)) e_1 = u(p) \cdot e_n + (1-u(p)) e_1$$

• $p \succsim p' \iff \underbrace{u(p)}_{\alpha} \cdot e_n + (1-u(p)) \cdot e_1 \succsim \underbrace{u(p')}_{\beta} e_n + (1-u(p')) e_1 \underset{(A)}{\iff} \underbrace{u(p)}_{\alpha} \geq \underbrace{u(p')}_{\beta}$ ∎

und $e_n \succ e_1$, $u(p), u(p') \in [0,1]$ nach Definition

Interpretationen

① Normativ : Entscheidungsfindung unterstützen

Überschwemmung 1% , Evakuierung , Präferenzen

A	B	C	D
no Ü, no E	no Ü, E	Ü E	Ü no E

$\overset{B}{(0,1,0,0)} \sim (p,0,0,1-p)$

$\overset{C}{(0,0,1,0)} \sim (q,0,0,1-q)$

$\overset{A}{(1,0,0,0)} \succeq \overset{D}{(0,0,0,1)}$

+ (i)-(v).

$\Rightarrow \quad u(\underbrace{1,0,0,0}_{\text{Best}}) := 1 \quad , \quad u(\underbrace{0,0,0,1}_{\text{worst}}) := 0$

$$p(\alpha) = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + (1-\alpha) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \\ 1-\alpha \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \alpha_B = p, \ \alpha_C = q$$

$u(0,1,0,0) = p, \quad u(0,0,1,0) = q$

Policy 1: $P(E/\ddot{u}) = 90\%$, $P(E/no\,\ddot{u}) = 10\%$ } Vergleich

Policy 2: $P(E/\ddot{u}) = 95\%$, $P(E/no\,\ddot{u}) = 15\%$

Wegen $P(A_1/A_2) = \dfrac{P(A_1,A_2)}{P(A_2)}$:

Policy 1	0.891	0.099	0.009	0.001
Policy 2	0.8415	0.1485	0.0095	0.0005

Expected Utility: $0.891 + 0.099p + 0.09q \ ? \ 0.8415 + 0.1485p + 0.095q$

② Deskriptiv : Entscheidungsverhalten verstehen (Allais Paradoxon)

Preise: 25 5 0 (Mio €) Experiment

$p := (0,1,0)$, $p' := (0.1, 0.89, 0.01)$ riskier

$r := (0, 0.11, 0.89)$, $r' := (0.1, 0, 0.9)$ better prize

$p \succ p'$ und $r' \succ r$

Angenommen: $\exists\, u_1, u_2, u_3$ mit Erwartungsnutzen aus v. Neumann-Morgenstern.

$p \succ p' \iff u_2 > 0.1 \cdot u_1 + 0.89 \cdot u_2 + 0.01 \cdot u_3$

$+ 0.89u_3 - 0.89u_2$

$0.11 \cdot u_2 + 0.89u_3 > 0.1 \cdot u_1 + 0.9u_3 \Rightarrow r \succ r' \ \lightning$

$\rightarrow$ Regret theory : Bedauern / Enttäuschung