Inattention Problem

Unachtsamkeit / Unaufmerksamkeit

Frage: wie ist Choice behavior als Optimierungsproblem aufzufassen:

Nutzen der i-ten Alternative

Nutzen/Kosten - Transformationskonstante, $\mu > 0$

$$\max_{p \in \Delta} \underbrace{\sum_{i=1}^n p_i \cdot u_i}_{\text{Erwarteter Nutzen}} - \mu \cdot \underbrace{D(p,q)}_{\text{Informationskosten}}$$

$\Delta = \{(p_i)_{i=1}^n \mid p_i \in [0,1], \sum_{i=1}^n p_i = 1\}$

Auswahlwahrscheinlichkeiten

"choice of alternatives $1, \dots, n$"

Wie unterscheidet sich p von q?

Kullback-Leibler-Distanz

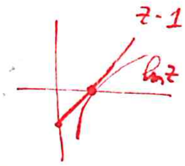
$q \in \Delta$ "prior"-Verteilung und $q_i \neq 0$

Informationskosten: $D(p,q) := \sum_{i=1}^n p_i \ln \frac{p_i}{q_i}$ für $p \in \Delta$.

(Konvention: $0 \cdot \log 0 = 0$, da $\lim_{x \to 0} x \cdot \ln x = \lim_{x \to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{-\infty}{\infty}\right] \underset{\text{l'H}}{=} \lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = 0.$)

Eigenschaften von $D(\cdot, q)$:

(i) $D(\cdot, q)$ - konvex, da $\left(x \ln \frac{x}{y}\right)''_x = \left(\ln \frac{x}{y} + y\right)'_x = \frac{1}{x} > 0$, $y, x > 0$.



(ii) $D(p,q) \geq 0$ und $D(p,q) = 0 \Leftrightarrow p_i = q_i \; \forall i$

$$-D(p,q) = \sum_{i=1}^n p_i \ln \frac{q_i}{p_i} \underset{\ln z \leq z-1}{\leq} \sum_{i=1}^n p_i \cdot \left(\frac{q_i}{p_i} - 1\right) = \sum_{i=1}^n q_i - \sum_{i=1}^n p_i = 0$$

Gleichheit genau dann, wenn $\frac{q_i}{p_i} = 1 \; \forall i = 1, \dots, n$

"Verteilung $q \in \Delta$ erzeugt keine Kosten: $D(q,q) = \sum_{i=1}^n q_i \ln \frac{q_i}{q_i} = 0$."

(iii) $D(p,q) \leq -\ln \min_{1 \leq i \leq n} q_i$ und $D(p,q) = -\ln \min_{1 \leq i \leq n} q_i \Leftrightarrow \exists i: p_i = 1$.

"Maximale Kosten bei deterministischer Entscheidung"

da $D(p,q) = \underbrace{\sum_i \overset{\geq 0}{p_i} \ln \overset{\in [0,1]}{p_i}}_{\leq 0} + \sum_i p_i \ln \frac{1}{q_i} \leq \sum_i p_i \ln \frac{1}{q_i}$

$$\max_{p \in \Delta} \sum_i p_i \cdot \ln \frac{1}{q_i} \underset{\substack{p_i = 1 \\ p_{\neq i} = 0}}{=} \max_{1 \leq i \leq n} \ln \frac{1}{q_i} = \ln \max_{1 \leq i \leq n} \frac{1}{q_i} = \ln \frac{1}{\min_{1 \leq i \leq n} q_i}$$

für i mit Maximum

Gleichheit genau dann, wenn $p_i = 1$, $p_{\neq i} = 0$ für ein i.

(vgl. $\sum_i p_i \ln p_i = 0 \Leftrightarrow p_i = 1$, $p_{\neq i} = 0$ für ein i)

Spezialfall $\bar{q} := \left(\frac{1}{n}, \dots, \frac{1}{n}\right)$ ← Gleichverteilung

$$D(p,\bar{q}) = \sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i + \underbrace{\sum_{i=1}^{n} p_i}_{=1} \ln n = \sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i + \ln n$$

$$0 \le D(p,\bar{q}) \le \ln \frac{1}{\min\limits_{1 \le i \le n} \frac{1}{\bar{q}_i}} = \ln n.$$ ← Maximalkosten

$$\max_{p \in \Delta} \sum_{i=1}^{n} p_i u_i - \mu \cdot D(p,\bar{q}) = \sum_{i=1}^{n} p_i u_i - \mu \cdot \sum_{i=1}^{n} p_i \ln p_i - \mu \ln n$$

Ableitung nach p_i:
(Optimalitätsbedingung)

$$u_i - \mu \cdot (1 + \ln p_i) = \lambda$$ ← Lagrange-multiplikat

$$\ln p_i = \frac{u_i - \lambda}{\mu} - 1, \quad p_i = e^{u_i/\mu} \cdot e^{-1-\frac{\lambda}{\mu}}$$

$\sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \Rightarrow$

$$1 = \sum_{i=1}^{n} p_i = \sum_{i=1}^{n} e^{u_i/\mu} \cdot e^{-1-\frac{\lambda}{\mu}} \Rightarrow e^{-1-\frac{\lambda}{\mu}} = \frac{1}{\sum_{i=1}^{n} e^{u_i/\mu}}$$

Insgesamt:

$$\boxed{p_i = \frac{e^{u_i/\mu}}{\sum_{i=1}^{n} e^{u_i/\mu}}, \quad i = 1, \dots, n}$$ Discrete Choice

$$p_i = \mathbb{P}\left(u_i + \varepsilon_i = \max_{1 \le i \le n} u_i + \varepsilon_i\right),$$ wobei $\varepsilon_i \sim G(0,\sigma^2)$ und Varianz $\sigma^2 = \frac{\mu^2 \pi^2}{6}$

↑ wahrgenommener Nutzen

↑ Parameter des Fehlers

Fazit: Inattention Problem mit $\underbrace{D(p,\bar{q})}_{\text{Informationskosten}} = \sum p_i \ln p_i - \ln n$

$\underbrace{\mu > 0}_{\text{Nutzen/Kosten-Trafokonstante}}$

$\underbrace{u_i,\ i = 1, \dots, n}_{\text{Nutzen der Alternativen}}$

äquivalent

Discrete Choice mit $\underbrace{\varepsilon_i \sim G(0,\sigma^2)}_{\text{Fehler Gumbel-verteilt}}$

$\underbrace{\sigma^2 = \frac{\mu^2 \pi^2}{6}}_{\text{Varianz mit Parameter } \mu}$

$\underbrace{u_i,\ i = 1, \dots, n}_{\text{Nutzenerwartungen}}$

Herleitung der Informationskosten

$$E(u) := \mathbb{E}\left(\max_{1\le i\le n} u_i + \varepsilon_i\right), \quad \varepsilon_i \sim G(0,\sigma^2), \quad \sigma^2 = \frac{\mu^2\pi^2}{6}.$$

siehe (ii) $\Rightarrow$ $$E(u) = \mu \cdot \ln \sum_{i=1}^n e^{u_i/\mu}.$$

Betrachte das folgende duale Optimierungsproblem:

$$E^*(p) := \max_u \sum_{i=1}^n p_i u_i - E(u)$$ konjugierte Funktion von $E(\cdot)$

(wegen Optimalität nach u: $p_i = \frac{\partial E(u)}{\partial u_i}$, $i=1,\dots,n$) ↙ duales Problem über Häufigkeiten

s.o. Vorl. $\boxed{p_i = \mathbb{P}\left(u_i + \varepsilon_i = \max_{1\le i\le n} u_i + \varepsilon_i\right)}$

Discrete choice

d.h. Zu Wahrscheinlichkeitsverteilung $p\in\Delta$ werden $(u_i)_{i=1}^n$ wahrgenommene Nutzen gefunden, die bzgl. des Fehlers ε_i, $i=1,\dots,n$, genau die Auswahlwahrscheinlichkeiten $(p_i)_{i=1}^n$ liefern.

inverses Problem

Hier: $$E^*(p) = \max_u \sum_{i=1}^n p_i u_i - \mu \ln \sum_{i=1}^n e^{u_i/\mu}.$$

Optimalität: $$p_i - \mu \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^n e^{u_i/\mu}} \cdot e^{u_i/\mu} \cdot \frac{1}{\mu} = 0 \Rightarrow p_i = \frac{e^{u_i/\mu}}{\underbrace{\sum_{i=1}^n e^{u_i/\mu}}_{=:C}}, \; i=1,\dots,n$$

$$p_i C = e^{u_i/\mu}$$

$$\ln p_i + \ln C = u_i/\mu$$

$$\Rightarrow E^*(p) = \sum_{i=1}^n p_i \cdot (\mu \ln p_i + \mu \ln C) - \mu \ln C = \mu \cdot \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i + \underbrace{\left(\sum_i p_i - 1\right)}_{=0}\mu \ln C$$

Insgesamt: $$E^*(p) = \mu \cdot \sum_{i=1}^n p_i \ln p_i =$$ ↙ additive Konstante

$$\text{und } \mu \cdot D(p,\bar{q}) = E^*(p) - \mu \ln n$$

↑ Informations-kosten

↑ konjugierte von $E(\cdot)$

$\Rightarrow \max_{p\in\Delta} \langle p,u\rangle - E^*(p)$

primales Problem

Also: Informationskosten entsprechen der Konjugierten des erwarteten Maximalnutzens bis auf eine additive Konstante.

Löse primales Problem über das duale (Häufigkeit)