Frage: Wie sind die zufälligen Nutzenwahrnehmungen mit Präferenzen zu vereinbaren?

stochastischer Fehler bzw. zufälliger Nutzen

Alternativenmenge

$|A| = n$ # Alternativen, $P_S(a)$, $S \subseteq A$

"stochastic Choice on S" $C(S) := P_S(a), a \in S$ Wahrscheinlichkeitsverteil auf S

Wahrscheinlichkeit, aus S a auszuwählen

(d.h. $\sum_{a \in S} P_S(a) = 1$, $P_S(a) \in [0,1]$)

Definition 1: (A, P) heißt <u>repräsentierbar durch stochastischen Nutzen</u>, falls existieren U_a, $a \in A$ Zufallsvariablen mit

$$P_S(a) = \mathbb{P}\left(\underset{\text{Nutzen der a-ten Alternative}}{U_a} = \underset{\text{Maximalnutzen}}{\max_{a \in S} U_a} \right) \quad \text{stochastisch}$$

"stochastischer Nutzen"

Beispiel:
- $U_a \sim N(\mu_a, \sigma_a^2)$ normal
- $U_a \sim G(0, \sigma^2)$, $\sigma^2 = \frac{\mu^2 \pi^2}{6}$ Gumbel, s. Vorl. 2.

Rankings für A von möglichen Präferenzen $R(A)$:

z. B. $A = \{a, b, c\}$

R_1:	$a \succ b \succ c$	π_1
R_2:	$a \succ c \succ b$	π_2
R_3:	$b \succ a \succ c$	π_3
R_4:	$b \succ c \succ a$	π_4
R_5:	$c \succ a \succ b$	π_5
R_6:	$c \succ b \succ a$	π_6

R_j, $j = 1, \dots, n!$

$n!$ Anzahl von möglichen Rankings

$\pi_j \in [0,1]$, $\sum_{j=1}^{n!} \pi_j = 1$

Wahrscheinlichkeitsverteilung auf der Menge aller Rankings $R(A)$

Definition 2: (A, P) heißt <u>stochastisch rationalisierbar</u>, falls

$$\exists (\pi_j)_{\substack{R_j \in R(A) \\ j = 1, \dots, n!}} : P_S(a) = \sum_{j=1}^{n!} \{ \pi_j \mid \underbrace{\forall b \in S_{\neq a} : a \succ b \text{ bzgl. } R_j}_{\text{"a ist besser als jedes b aus S bzgl. des Rankings } R_j\text{"}} \} \quad \forall a \in S \subseteq A$$

oder gesonderte Teilmengen

"stochastische Präferenzen"

Summe der Wahrscheinlichkeiten aller Rankings, die a besser als alle anderen Elemente aus S bewerten.

Beispiel: ...

$P_S(\cdot)$:

	$S=\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a,b\}$	$\{a,c\}$	$\{b,c\}$
a	1	x	x	1/2 3/4	1/2 1/4	x
b	x	1	x	1/2 1/4	x	1/2 3/4
c	x	x	1	x	1/2 3/4	1/2 1/4

$R_1 \quad a \succ b \succ c$
$R_2 \quad a \succ c \succ b$
$R_3 \quad b \succ a \succ c$
$R_4 \quad b \succ c \succ a$
$R_5 \quad c \succ a \succ b$
$R_6 \quad c \succ b \succ a$

$3/4 \; \frac{1}{2} = P_{ab}(a) = \pi_1 + \pi_2 + \pi_5 \; (*)$

$1/4 \; \frac{1}{2} = P_{ab}(b) = \underline{\pi_3 + \pi_4 + \pi_6} \; (1)$

$1/4 \; \frac{1}{2} = P_{ac}(a) = \underline{\pi_1 + \pi_2 + \pi_3} \; (2)$

$3/4 \; \frac{1}{2} = P_{ac}(c) = \pi_4 + \pi_5 + \pi_6$

$3/4 \; \frac{1}{2} = P_{bc}(b) = \pi_1 + \pi_3 + \pi_4$

$1/4 \; \frac{1}{2} = P_{bc}(c) = \underline{\pi_2 + \pi_5 + \pi_6} \; (3)$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ \pi_2 \\ \pi_3 \\ \pi_4 \\ \pi_5 \\ \pi_6 \end{pmatrix}$$

Lösung: $\pi_i = \frac{1}{6} \; \forall i = 1, \dots, 6 = 3!$

$(1)+(2)+(3) \Rightarrow \frac{3}{4} = \pi_1 + 2\pi_2 + 2\pi_3 + \pi_4 + \pi_5 + 2\pi_6$

$- \quad (*) \Rightarrow \frac{3}{4} = \pi_1 + \pi_2 + \pi_5$

$\pi_2 + 2\pi_3 + \pi_4 + 2\pi_6 = 0 \Rightarrow \pi_2 = \pi_3 = \pi_4 = \pi_6 = 0 \; \lightning \; (1) \; \frac{1}{4} = 0.$

(ü.)

Satz 1: (A,P) ist repräsentierbar durch stochastischen Nutzen dann und nur dann, wenn (A,P) stochastisch rationalisierbar ist

Beweis: "$\Rightarrow$" Sei (A,P) mit $P_S(i) = \mathbb{P}(U_i = \max_{i \in S} U_i)$

Definiere $\pi_j := \mathbb{P}(U_{j_1} > U_{j_2} > \dots > U_{j_n})$, $j = 1, \dots, n!$

Wahrscheinlichkeit der Rankingspermutation.

$(R_j : \; j_1 \succ j_2 \succ \dots \succ j_n)$

Ranking

$\underline{j_1, j_2, \dots, j_n}$

Permutation von $\{1, 2, \dots, n\} = A$

"$\Leftarrow$" Sei (A,P) mit $P_S(i) = \sum_{j=1}^{n!} \{\pi_j \mid \forall k \in S, k \neq i: \; i \succ k \text{ bzgl. } R_j\}$

Definiere $\mathbb{P}(U_{j_k} = \frac{1}{k}, \; k = 1, \dots, n) := \pi_j$

diskrete Verteilung von $(U_1, \dots, U_n)$

Minimale Nummer in der Permutation

Zusammenhang mit Discrete

$$P_{\{1,\dots,n\}=A}(i) = p_i = \frac{u_i}{\sum_{i\in A} u_i} \quad \text{mit } u_i > 0,\ i=1,\dots,n$$

Discrete Choice probability — Nutzenwahrnehmung

Betrachte $\varepsilon_i \sim G(0,\sigma^2)$, $\sigma^2 = \frac{\mu^2\pi^2}{6}$ Gumbel-verteilt mit Erwartungswert 0 und Varianz σ^2 und stoch. unabhängig

$$\mathbb{P}\Big(U_i = \max_{1\le i\le n} \overbrace{\underbrace{\mu\cdot\ln u_i}_{w_i} + \varepsilon_i}^{=:U_i}\Big) \underset{\text{Vorl. 2}}{=} \frac{e^{w_i/\mu}}{\sum_{i=1}^n e^{w_i/\mu}} = \frac{u_i}{\sum_{i=1}^n u_i} = p_i \Rightarrow$$

Discrete Choice ist durch stochastischen Nutzen repräsentierbar.

Weiterhin:

$$\pi_j \underset{\substack{\text{s.o.}\\ \text{Satz 1}}}{=} \mathbb{P}(U_{j_1} > U_{j_2} > \dots > U_{j_n}) = \mathbb{P}\Big(U_{j_1} = \max_{i=1,\dots,n} U_{j_i},\ U_{j_2} = \max_{i=2,\dots,n} U_{j_i} \dots U_{j_n} = \max_{i=n} U_{j_i}\Big)$$

$$\overset{\text{"="}}{\le} \underbrace{\mathbb{P}\Big(U_{j_1} = \max_{i=1,\dots,n} U_{j_i}\Big)}\cdot \mathbb{P}\Big(U_{j_2} = \max_{i=2,\dots,n} U_{j_i}\Big)\cdot \mathbb{P}\Big(U_{j_n} = \max_{i=n} U_{j_i}\Big)$$

$$\underset{DC}{=} \frac{u_{j_1}}{\sum_{i=1}^n u_{j_i}} \cdot \frac{u_{j_2}}{\sum_{i=2}^n u_{j_i}} \cdot \ldots \cdot \frac{u_{j_n}}{\sum_{i=n} u_{j_i}}$$

Summiere über $\sum_j$ Rankings $j_1 \succ j_2 \succ \dots \succ j_n$

"gewinnt" ← fest — $(n-1)!$ Permutationen

$$\cancel{P_A(j_1)} = \sum_{R_j: j_1\succ\dots} \pi_j \le \underbrace{\frac{u_{j_1}}{\sum_{i=1}^n u_{j_i}}}_{\cancel{P_A(j_1)}} \cdot \sum_{R_j: j_1\succ\dots} \frac{u_{j_2}\cdot\ldots\cdot u_{j_n}}{\sum_{i=2}^n u_{j_i}\cdots\sum_{i=n}^n u_{j_i}} \Rightarrow \frac{1}{\prod_{i\ne j_1} u_i} \le \sum_{j_2,\dots,j_n} \frac{1}{\sum_{i=2}^n u_{j_i}\cdots\sum_{i=n}^n u_{j_i}}$$

Permutation — Gleichheit

Ü $a_1,\dots,a_K \in \mathbb{R}$: $\displaystyle \frac{1}{\prod_{\ell=1}^K a_\ell} = \sum_{j:\text{ Permutation von } 1,\dots,K} \frac{1}{\sum_{\ell=1}^K a_{j_\ell}\cdots\sum_{\ell=K}^K a_{j_\ell}}$

$$\Big\} \Rightarrow \pi_j = P_A(j_1)\cdot P_{A|j_1}(j_2)\cdot\ldots\cdot P_{A|j_1,\dots,j_{n-1}}(j_n)$$

Wahrscheinlichkeit des Rankings — sukzessive Auswahlwahrscheinlichkeiten im Ranking

Satz 2: Discrete Choice ist

stochastisch rationalisierbar mit Rankingswahrscheinlichkeiten:

$\pi_j = P_A(j_1)\cdot P_{A|j_1}(j_2)\cdots P_{A|j_1,\dots,j_{n-1}}(j_n) \quad \forall R_j: j_1 \succ j_2 \succ \dots \succ j_n$

Umgekehrte Richtung ist auch wahr.

$$P_S(a) = \sum_j \{ t_j \mid \forall b \neq a \in S : a \succ b \text{ bzgl. } R_j \}$$

$$\Rightarrow \circledast \quad P_S(a) = \sum_j \{ P_A(j_1)\cdot P_{A|j_1}(j_2)\cdots P_{A|j_1,\dots,j_{n-1}}(j_n) \mid \forall b \neq a \in S : a \succ b \text{ bzgl. } R_j \}$$

$$j_1 \succ j_2 \succ \dots \succ j_{n-1} \succ j_n$$

a ist früher als $S \setminus \{a\}$ in dieser j Permutati

Setze: $u_i := P_A(i)$ und löse $\circledast$ für alle $S \subseteq A$ zusammen.

z.B. $A = \{a, b, c\}$

Probability

$$u_a = P_{abc}(a) = \overbrace{\underbrace{P_{abc}(a)}_{u_a}\cdot P_{bc}(b)\cdot \underbrace{P_c(c)}_{1}}^{a\succ b\succ c} + \overbrace{\underbrace{P_{abc}(a)}_{u_a}\cdot P_{bc}(c)\cdot \underbrace{P_b(b)}_{1}}^{a\succ c\succ b} \Leftrightarrow 1 = P_{bc}(b) + P_{bc}(c)$$

$$u_b = P_{abc}(b) = \overbrace{\underbrace{P_{abc}(b)}_{u_b}\cdot P_{ac}(a)\cdot \underbrace{P_c(c)}_{1}}^{b\succ a\succ c} + \overbrace{\underbrace{P_{abc}(b)}_{u_b}\cdot P_{ac}(c)\cdot \underbrace{P_a(a)}_{1}}^{b\succ c\succ a} \Leftrightarrow 1 = P_{ac}(a) + P_{ac}(c)$$

$$u_c = P_{abc}(c) = \overbrace{\underbrace{P_{abc}(c)}_{u_c}\; P_{ab}(a)\cdot \underbrace{P_b(b)}_{1}}^{c\succ a\succ b} + \overbrace{\underbrace{P_{abc}(c)}_{u_c}\cdot P_{ab}(b)\cdot \underbrace{P_a(a)}_{1}}^{c\succ b\succ a} \Leftrightarrow 1 = P_{ab}(a) + P_{ab}(b)$$

$$\left.\begin{aligned}
P_{ab}(a) &= \overbrace{u_a\cdot P_{bc}(b) + u_a P_{bc}(c)}^{u_a} + u_c\cdot P_{ab}(a)\\
P_{ab}(b) &= \overbrace{u_b\cdot P_{ac}(a) + u_b P_{ac}(c)}^{u_b} + u_c\cdot P_{ab}(b)\\
P_{ac}(a) &= \overbrace{u_a\cdot P_{bc}(b) + u_a\cdot P_{bc}(c)}^{u_a} + u_b\cdot P_{ac}(a)\\
P_{ac}(c) &= u_b\cdot P_{ac}(c) + \overbrace{u_c\cdot P_{ab}(a) + u_c\cdot P_{ab}(b)}^{u_c}\\
P_{bc}(b) &= u_a\cdot P_{bc}(b) + \overbrace{u_b\cdot P_{ac}(a) + u_b\cdot P_{ac}(c)}^{u_b}\\
P_{bc}(c) &= u_a\cdot P_{bc}(c) + \underbrace{u_c\cdot P_{ab}(a) + u_c\cdot P_{ab}(b)}_{u_c}
\end{aligned}\right\}
\qquad
\begin{aligned}
P_{ab}(a) &= \frac{u_a}{u_a+u_b}\\
P_{ab}(b) &= \frac{u_b}{u_a+u_b}\\
P_{ac}(a) &= \frac{u_a}{u_a+u_c}\\
P_{ac}(c) &= \frac{u_c}{u_a+u_c}\\
P_{bc}(b) &= \frac{u_b}{u_b+u_c}\\
P_{bc}(c) &= \frac{u_c}{u_b+u_c}
\end{aligned}$$

$u_a + u_b + u_c = 1$

Discrete Choice

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned}
P_{ab}(a) &= u_a + u_c P_{ab}(a)\\
P_{ab}(b) &= u_b + u_c P_{ab}(b)\\
P_{ac}(a) &= u_a + u_b P_{ac}(a)\\
P_{ac}(c) &= u_c + u_b P_{ac}(c)\\
P_{bc}(b) &= u_b + u_a P_{bc}(b)\\
P_{bc}(c) &= u_c + u_a P_{bc}(c)
\end{aligned}\right\}
\Rightarrow
\begin{aligned}
P_{ab}(a) &= \frac{u_a}{1-u_c}\\
P_{ab}(b) &= \frac{u_b}{1-u_c}\\
P_{ac}(a) &= \frac{u_a}{1-u_b}\\
P_{ac}(c) &= \frac{u_c}{1-u_b}\\
P_{bc}(b) &= \frac{u_b}{1-u_a}\\
P_{bc}(c) &= \frac{u_c}{1-u_a}
\end{aligned}$$