Preferences, Choice and Utility

Frage: wie vergleicht man Alternativen aus einer <u>unendlichen</u> Auswahlmenge?

Grundmenge

Menge der Alternativen

① Rationale Präferenz $\succsim$ auf X:

(i) reflexiv: $x \succsim x \quad \forall x \in X$

(ii) vollständig: $x \succsim y$ oder $y \succsim x \quad \forall x, y \in X$

(iii) transitiv: $x \succsim y$ und $y \succsim z \Rightarrow x \succsim z \quad \forall x, y, z \in X$

Beispiel: "Mental accounting" Kahneman & Tversky, 1984

x = Kaufhaus 2 & Rabatt 5€ für Taschenrechner 15€

y = Kaufhaus 2 & Rabatt 5€ für Stereoanlage 125€

z = Kaufhaus 1 & kein Rabatt

Empirisch: $x \succ z$, $z \succ y$, aber $x \sim y$ indifferent ↯ Transitivität $x \succ y$.

choice rule

② Choice Structure $(\mathcal{B}, C(\cdot))$

- $\mathcal{B} \subseteq Pot(X)$ - Teilmengen von X

$\emptyset \neq C(B) \subseteq B \quad \forall B \in \mathcal{B}$

Auswahlmenge aus B ↑ Alternativenmenge

Weak Axiom of Revealed Preferences:

Sei: $B \in \mathcal{B}$: $\underbrace{x, y \in B}_{\text{x und y stehen zur Wahl aus B}}$ und $\underbrace{x \in C(B)}_{\text{x wird ausgewählt aus B}}$.

$\forall B' \in \mathcal{B}$: $\underbrace{x, y \in B'}_{\text{x, y stehen zur Wahl aus B'}}$ und $\underbrace{y \in C(B')}_{\text{y wird ausgewählt aus B'}} \Rightarrow \underbrace{x \in C(B')}_{\text{x ist auch ausgewählt aus B'}}$

Beispiel: $B = \{x, y\}$, $C(\{x, y\}) = x$

$B' = \{x, y, z\}$, $C(\{x, y, z\}) =$

x	y	z	xy	xz	yz	xyz
✓	✗	✓	✗	✓	✗	✗

$C(\overbrace{x, y, z}^{B}) = \{x, y\}$

$C(\underbrace{x, y}_{B'}) \ni x \overset{}{\underset{\text{WARP}}{\Rightarrow}} y \in C(x, y)$ ↯

Zusammenhang zwischen Preference & Choice

"$\succsim$" Präferenz generiert die Choice-Struktur

$$\forall B \in \mathcal{B}: \quad C(B,\succsim) := \{x \in B \,/\, x \succsim y \quad \forall y \in B\}$$

Auswahlmenge besteht aus allen am besten präferierten Alternativen

Satz 1: $\succsim$ rationale Präferenz generiert WARP Choice $C(\cdot,\succsim)$

Beweis: $x, y \in B$ und $x \in C(B,\succsim)$, d.h. $x \succsim y$

Ang. $x, y \in B'$ und $y \in C(B',\succsim)$, d.h. $y \succsim z \quad \forall z \in B'$

$\Rightarrow$ $x \succsim z \quad \forall z \in B'$ d.h. $x \in C(B',\succsim)$ Transitivität WARP.

Satz 2: $\mathcal{B}$ enthalte alle Teilmengen von X mit mindestens 3 Elemente (z.B. $\mathcal{B} = Pot(X)$).

Für WRAP Choice $C(\cdot,\succsim)$ existiert rationale Präferenz $\succsim$ mit

$$C(B) = C(B,\succsim) \quad \forall B \in \mathcal{B} \quad (*)$$

Darüber hinaus, ist $\succsim$ eindeutig mit (*).

Beweis: Definiere

$$x \succsim y \;:\Leftrightarrow\; \exists B \in \mathcal{B} \text{ mit } \underbrace{x, y \in B \text{ und } x \in C(B)}$$

"x, y können gewählt werden und x wird genommen"

(a) $\succsim$ ist rational

(i) reflexiv: $x \succsim x$, da $B := \{x\}$ und $x \in C(B) \neq \emptyset$

(ii) vollständig: wähle $B := \{x,y\}$ und $C(\{x,y\}) = \begin{cases} x & \Rightarrow x \succsim y \\ y & \Rightarrow y \succsim x \\ \{x,y\} & \Rightarrow x \succsim y \text{ und } y \succsim x \end{cases}$

(iii) transitiv: $x \succsim y$ und $y \succsim z$.

$B' := \{x,y,z\}$

- $x \in C(\{x,y,z\}) \underset{Def.}{\Rightarrow} x \succsim z$
- $y \in C(\{x,y,z\}) \Rightarrow x, y \in B', y \in C(B') \underset{WARP}{\Rightarrow} \underline{x \in} C(B') = \underline{C(\{x,y,z\})}$ $\Rightarrow x \succsim z$

  $x \succsim y \Leftrightarrow \exists B$ mit $x, y \in B$, $x \in C(B)$
- $z \in C(\{x,y,z\}) \underset{analog\ y \succsim z}{\Rightarrow} y \in C(\{x,y,z\}) \underset{s.o.}{\Rightarrow} x \succsim z$

(b) $C(B) = C(B,\succsim) \quad \forall B \in \mathcal{B}$

"$\subset$" $x \in C(B) \underset{\text{Def. von } \succsim}{\Rightarrow} \forall y \in B \quad x \succsim y \underset{\text{Def. von } C(B,\succsim)}{\Rightarrow} x \in C(B,\succsim)$

"$\supset$" $x \in C(B,\succsim) \underset{\text{"}C(B,\succsim)\text{"}}{\Rightarrow} \forall y \in B \quad x \succsim y \underset{\text{"}\succsim\text{"}}{\Rightarrow} \forall y \; \exists B_y \in \mathcal{B}$ mit $x, y \in B_y$, $x \in C(B_y)$

"optimal"

$x \in B, \bar{y} \in B$, $\bar{y} \in C(B) \neq \emptyset \underset{WARP}{\Rightarrow} x \in C(B)$

(c) $\succsim$ eindeutig: Da $|B| = 2$ in $\mathcal{B}$ sind, werden alle $x \succsim y$ festgelegt.

③ Utility

$u: X \to \mathbb{R}$ – Nutzenfunktion

Satz 3: Die Präferenz

$$x \succsim y \;:\Longleftrightarrow\; u(x) \geq u(y) \qquad \forall x,y \in X$$

ist rational.

Beweis: (i) reflexiv: $x \succsim x \Leftrightarrow u(x) \geq u(x)$ ✓

(ii) vollständig: $x \succsim y$ oder $y \succsim x \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$ oder $u(y) \geq u(x)$ ✓

(iii) transitiv: $x \succsim y$ und $y \succsim z \Rightarrow \underline{u(x)} \geq u(y) \geq \underline{u(z)} \Rightarrow x \succsim z$.

Satz 4: Für $\succsim$ rationale und stetige Präferenz

d.h. $x^n \succsim y^n \; \forall n \Rightarrow x \succsim y$ "keine Sprünge in Präferenzen"

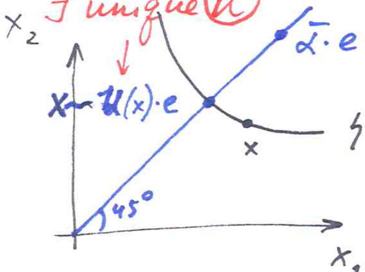
$x^n \to x$, $y^n \to y$ $(n \to \infty)$

ex. Nutzenfunktion $u: X \to \mathbb{R}$ (auch stetig)

mit $u(x) \geq u(y) \Leftrightarrow x \succsim y$

Beweis: (unter Annahmen $X = \mathbb{R}^L_+$; $\succsim$ monoton, d.h. $x \in X$, $y > x \Rightarrow y \succ x$ "mehr ist besser")

$\exists$ unique ü



$\bar{\alpha}\cdot e = \bar{\alpha}\begin{pmatrix}1\\ \vdots \\ 1\end{pmatrix}$ Diagonale

$\{y \mid y \sim x\}$, $x = (x_1, x_2)$ fest

indifferent

(i) $u(x) \geq u(y) \underset{\substack{\text{monoton}\\ +\text{stetig}}}{\Rightarrow} u(x)\cdot e \succsim u(y)\cdot e \Rightarrow x \succsim y$

$\quad\quad u(x)\cdot e \sim x$, $u(y)\cdot e \sim y$

$x \succsim y \underset{\text{transitiv}}{\Rightarrow} u(x)\cdot e \succsim u(y)\cdot e \underset{\text{monoton}}{\Rightarrow} u(x) \geq u(y)$

(Ansonsten: $u(x) < u(y) \underset{\text{monoton}}{\Rightarrow} u(x)\cdot e \prec u(y)$ und $u(x)\cdot e \prec u(y)\cdot e$ ↯)

(ii) u ist stetig ü

Ordinalität:

$$x \succsim y \Leftrightarrow \underbrace{u(x) \geq u(y)}_{\text{Ordnung}} \Leftrightarrow Tu(x) \geq Tu(y)$$

monotone Transformation $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so daß $T(a) \geq T(b) \Leftrightarrow a \geq b$.

neue andere Nutzenfunktion

"nur Ordnung zählt und nicht die Nutzengröße"

Cardinalität: $\underbrace{u(x) - u(y)}_{\text{Differenz}}$ ist für die Entscheidung relevant, z.B. Weber-Fechner / Thurstone

$P(x,y) = H(\underbrace{\ln x - \ln y}_{\text{Nutzendifferenz}})$ oder $= \Phi(\underbrace{\mu(x) - \mu(y)}_{\text{Nutzendifferenz}})$

Beispiele

$u(x): \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ ← Mengen für Güter $i = 1, \dots, n$

- Additive/Lineare Nutzenfunktion:

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$$

← Sensitivität des Nutzens bzgl. Gut i

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = a_i$$

partielle Ableitung nach x_i

- Leontieff-Nutzenfunktion:

$$u(x) = \min_{1 \le j \le m} \frac{(Q \cdot x)_j}{\sigma_j}, \text{ wobei } m \,\square$$

$(Q \cdot x)_j$: j-te verbrauchte Qualität

n = #Güter, m = #Qualitäten, Qualitätsmatrix Q

i-te Spalte: "Qualitäten $1, \dots, m$ in einer Einheit des Gutes i"

σ_j: Standard der j-ten Qualität

$\min$: schlechteste Qualität/Standard Relation

- Cobb-Douglas Nutzenfunktion:

$$u(x) = x_1^{\alpha_1} \cdot \ldots \cdot x_n^{\alpha_n} = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i} \quad \text{mit } \alpha_1 + \ldots + \alpha_n = 1$$

Elastizität von u ($\mathbb{R}^1$) in x:

$$\underbrace{\frac{u(x+h) - u(x)}{u(x)}}_{\text{relative Nutzenänderung}} : \underbrace{\frac{h}{x}}_{\text{relative Mengenänderung}} \to \underbrace{u'(x) \cdot \frac{x}{u(x)}}_{\varepsilon_u(x)}$$

Ableitung

$\mathbb{R}^n$:

$$\varepsilon_u^{(i)}(x) = \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \cdot \frac{x_i}{u(x)}$$

relative Nutzenänderung in %
bei der Steigerung des Gutes x_i um 1 %

$$\varepsilon_u^{(i)}(x) = \alpha_i \cdot x_i^{\alpha_i - 1} \cdot x_1^{\alpha_1} \ldots x_n^{\alpha_n} \cdot \frac{x_i}{x_1^{\alpha_1} \ldots x_i^{\alpha_i} \ldots x_n^{\alpha_n}} = \alpha_i$$

ohne x_i