Discrete Choice

Frage: wie ist das Discrete-Choice-Modell mit Nutzenmaximierung zu vereinbaren?

$$\max_{1\le i\le n} \; u_i + \varepsilon_i$$

Nutzen der Alternative i

Stochastischer Fehler

ⓐ Fehlerhafte Wahrnehmung

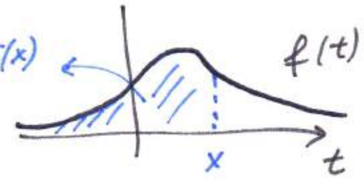
ⓑ Schwierigkeiten beim Vergleich

Wahrscheinlichkeitsverteilung des Fehlers ε:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$$

Verteilungsfunktion

Wahrscheinlichkeitsdichte



$= \mathbb{P}(\varepsilon \le x)$ – W'keit, daß Fehler ε kleiner oder gleich x ist.

Hier: $$\mathcal{U} := \max_{1\le i\le n} \underbrace{u_i + \varepsilon_i}_{=:\,\mathcal{U}_i}$$ – stochastischer Nutzen der i-ten Alternative

stochastischer Maximalnutzen

$$p_i := \mathbb{P}(\mathcal{U}_i = \mathcal{U})$$

Wahrscheinlichkeit, daß die i-te Alternative den Maximalnutzen realisiert.

Auswahlwahrscheinlichkeit der i-ten Alternative

Offenbar: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$, $p_i \in [0,1]$.

Spezialfall: zwei Alternativen

$$p_i = \mathbb{P}(\mathcal{U}_i = \mathcal{U}) = \mathbb{P}(u_i + \varepsilon_i \geq u_j + \varepsilon_j) = \mathbb{P}(\varepsilon_j - \varepsilon_i \leq u_i - u_j)$$

$$= \underbrace{F_{\varepsilon_j - \varepsilon_i}}_{\text{Verteilungsfunktion von } \varepsilon_j-\varepsilon_i}(u_i - u_j) = \int_{-\infty}^{u_i - u_j} \underbrace{f_{\varepsilon_j - \varepsilon_i}}_{\text{Wahrscheinlichkeitsdichte von } \varepsilon_j-\varepsilon_i}(t)\,dt$$

Annahme: ε_i und ε_j seien stochastisch unabhängig mit Wahrscheinlichkeitsdichten f_{ε_i} und f_{ε_j}

$$\mathbb{P}(\varepsilon_j - \underbrace{\varepsilon_i}_{y} \leq z) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varepsilon_i}(y)\,\mathbb{P}(\varepsilon_j \leq z+y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varepsilon_i}(y) \cdot \left(\int_{-\infty}^{z+y} f_{\varepsilon_j}(t)\,dt\right) dy$$

$$= \left| \begin{array}{l} s = t - y \\ t = -\infty \Rightarrow s = -\infty \\ t = z+y \Rightarrow s = z \end{array} \right| = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varepsilon_i}(y) \cdot \left(\int_{-\infty}^{z} f_{\varepsilon_j}(s+y)\,ds\right) dy = \int_{-\infty}^{z} \Bigg[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} f_{\varepsilon_i}(y) \cdot f_{\varepsilon_j}(s+y)\,dy}_{\text{Dichte } f_{\varepsilon_j-\varepsilon_i}(s)}\Bigg] ds$$

Also: $f_{\varepsilon_j - \varepsilon_i}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varepsilon_i}(y) \cdot f_{\varepsilon_j}(s+y)\,dy$.

Erwartungswert, Varianz

① Probit: $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i^2)$, $\varepsilon_j \sim \mathcal{N}(\mu_j, \sigma_j^2)$ normal verteilt.

$$f_{\varepsilon_j - \varepsilon_i}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_i} e^{-\frac{(y-\mu_i)^2}{2\sigma_i^2}}}_{f_{\varepsilon_i}(y)} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_j} e^{-\frac{(s+y-\mu_j)^2}{2\sigma_j^2}}}_{f_{\varepsilon_j}(s+y)}\,dy =$$

$$= \left| \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt = \sqrt{2\pi}}_{\text{Ü}} \right| = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{s - (\mu_j - \mu_i)}{\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}}\right)^2}}_{\varepsilon_i - \varepsilon_j \sim \mathcal{N}(\mu_j - \mu_i, \sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2})}$$

$$\Phi(z) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{z} e^{-\frac{1}{2}t^2}\,dt, \quad \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = F_{\varepsilon}(x), \text{ falls } \varepsilon \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma).$$

Verteilungsfkt. der Standardnormalverteilung

$$\Rightarrow p_i = F_{\varepsilon_i - \varepsilon_j}(u_i - u_j) = \Phi\left(\frac{u_i - u_j - (\mu_j - \mu_i)}{\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}}\right)$$

$$\varepsilon_i - \varepsilon_j \sim \mathcal{N}(\mu_i - \mu_j, \sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2})$$

(a) $\mu_i = \mu_j = 0$ "Erwartungswert des Fehlers $= 0$"

$$p_i = \Phi\left(\frac{u_i - u_j}{\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_j^2}}\right) \qquad \text{Probit-Modell}$$

(b) $u_i = u_j = 0$ "Nur stochastischer Fehler"

$$p_i = \Phi\left(\frac{\mu_i - \mu_j}{\sqrt{\sigma_i^2 + \sigma_i^2}}\right)$$

Law of Comparative Judgement
Thurstone, 1927

$$P(x,y) = \Phi\left(\mu(x) - \mu(y)\right)$$

Wahrscheinlichkeit, daß Stimulus x intensiver als y ist

monoton steigend

Erwartungswerte

(2) Logit: $\varepsilon_i \sim G(0, \sigma^2)$, $\varepsilon_j \sim G(0, \sigma^2)$ iid (unabhängig & identisch)

Gumbel-Verteilung mit Erwartungswert 0 und Varianz $\sigma^2 = \frac{\mu^2 \pi^2}{6}$, wobei $\mu > 0$ Parameter ist.

$$f_{\varepsilon_i}(y) = f_{\varepsilon_j}(y) = \frac{1}{\mu}\, e^{-\left(\frac{y}{\mu} + \gamma\right) - e^{-\left(\frac{y}{\mu} + \gamma\right)}}, \quad \gamma \approx 0.5772\ldots \text{ Eulersche Konstante}$$

$$f_{\varepsilon_j - \varepsilon_i}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{\varepsilon_i}(y) \cdot f_{\varepsilon_j}(s+y)\, dy \underset{\text{ü}}{=} \frac{e^{-\frac{s}{\mu}}}{\mu\left(1 + e^{-\frac{s}{\mu}}\right)^2}$$

logistische Verteilung

$$p_i = F_{\varepsilon_j - \varepsilon_i}(u_i - u_j) = \int_{-\infty}^{u_i - u_j} \frac{e^{-\frac{s}{\mu}}}{\mu\left(1 + e^{-\frac{s}{\mu}}\right)^2}\, ds = -\frac{\mu}{\mu} \int_{-\infty}^{u_i - u_j} \frac{d\, e^{-\frac{s}{\mu}}}{\left(1 + e^{-\frac{s}{\mu}}\right)^2} = \left| e^{-\frac{s}{\mu}} = x \right|$$

$$= \int_{-\infty}^{u_i - u_j} \frac{dx}{(1+x)^2} = \frac{1}{1+x}\Bigg|_{-\infty}^{u_i - u_j} = \frac{1}{1 + e^{-\frac{s}{\mu}}}\Bigg|_{-\infty}^{u_i - u_j} =$$

$$= \frac{1}{1 + e^{\frac{u_j - u_i}{\mu}}} = \frac{e^{\frac{u_i}{\mu}}}{e^{\frac{u_i}{\mu}} + e^{\frac{u_j}{\mu}}}$$

Allgemein: $\varepsilon_i \sim G(0, \sigma^2)$, $\sigma^2 = \frac{\mu^2 \pi^2}{6}$ iid-Gumbel, $i = 1, \ldots, n$

$$\underset{\text{ü}}{\Rightarrow} \; p_i = \frac{e^{u_i/\mu}}{\sum_{j=1}^{n} e^{u_j/\mu}} \quad \forall i = 1, \ldots, m \qquad \text{Logit-Modell}$$

Erwarteter Nutzen

$$E(u_1, \dots, u_n) := \underset{\uparrow}{\mathbb{E}} \left(\max_{1 \le i \le n} u_i + \varepsilon_i \right)$$

Erwartungswert bzgl. des Fehlers $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$

$$\rho_i = \frac{\partial E}{\partial u_i} \quad , i = 1, \dots, n$$

Auswahlwahrscheinlichkeit der i-ten Alternative

Änderungsrate des erwarteten Nutzens E bzgl. des Nutzens u_i der i-ten Alternative

Beweis: $E(u_i, u_j) := \mathbb{E}(\max\{u_i + \varepsilon_i, u_j + \varepsilon_j\})$

$$A_i := \{\omega \mid u_i + \varepsilon_i(\omega) > u_j + \varepsilon_j(\omega)\}$$

$$A_j := \{\omega \mid u_j + \varepsilon_j(\omega) > u_i + \varepsilon_i(\omega)\} \quad , \omega \in \Omega$$

Wahrscheinlichkeitsraum

Sei $\bar{u}_i$ Änderung von u_i, genügend klein:

$$\max\{\bar{u}_i + \varepsilon_i(\omega), u_j + \varepsilon_j(\omega)\} - \max\{\underbrace{u_i + \varepsilon_i(\omega)}_{}, \underbrace{u_j + \varepsilon_j(\omega)}_{}\} = \begin{cases} \bar{u}_i - u_i & , \omega \in A_i \\ 0 & , \omega \in A_j \\ * & , \omega \in \Omega \setminus A_i \cup A_j \end{cases}$$

$$\begin{matrix} > \\ < \\ = \end{matrix}$$

$$\mathbb{P}(\Omega \setminus A_i \cup A_j) = 0 \text{ , da } \varepsilon_i, \varepsilon_j \text{ stetig verteilt.}$$

Differenzenquotient

$$\frac{E(\bar{u}_i, u_j) - E(u_i, u_j)}{\bar{u} - u} = \frac{1}{\bar{u}_i - u_i} \mathbb{E}\left(\max\{\bar{u}_i + \varepsilon_i, u_j + \varepsilon_j\} - \max\{u_i + \varepsilon_i, u_j + \varepsilon_j\} \right)$$

$$= \frac{1}{\bar{u}_i - u_i} \quad (\bar{u}_i - u_i)\, \mathbb{P}(A_i) + 0 \cdot \mathbb{P}(A_j) + * \cdot \underbrace{\mathbb{P}(\Omega \setminus A_i \cup A_j)}_{= 0 \text{ s.o.}} = \underbrace{\mathbb{P}(A_i)}_{= \rho_i}$$

(im Grenzwert für $\bar{u}_i \to u_i$)
+ Satz von der majorisierten Konvergenz.

$$\Big\} \Rightarrow \frac{\partial E}{\partial u_i} = \rho_i \quad .$$