Time Inconsistency

Frage: Wie wird Nutzen in der Zukunft wahrgenommen?

heute: 10 € | in einem Jahr: 10 €

in einer Woche: 11 € | in einem Jahr und einer Woche: 11 €

Inkonsistenz: $x :=$ "10 € zur Zeit t"
$y :=$ "11 € zur Zeit $t+7$", d.h. $x > y$ für $t=0$, $x < y$ für $t = 365$ Tage ↯

Nutzen wird diskontiert bzgl. Zeit "Time impatience"

Ansatz: $u(x,t) := u(x) \cdot \varphi(t)$ – Multiplikative Struktur

x: Auszahlung, t: Zeit, $u(x)$: Nutzen (zeitunabhängig), $\varphi(t)$: Diskontierungsfaktor: · $\varphi(0) = 1$ · monoton fallend

Annahme (Stationarität): "Verzögerung ist linear in t"

$$\forall y > x: \quad u(x,0) = u(y,s) \quad \Rightarrow \quad u(x,t) = u(y, \overset{\kappa(x,y)}{\kappa} \cdot t + s)$$

jetzt x ~ y in Zeit s | x in Zeit t ~ y in Zeit $\kappa \cdot t + s$

oder:
$$u(x) = u(y)\varphi(s) \quad \Rightarrow \quad u(x)\varphi(t) = u(y)\varphi(\kappa t + s) \quad (*)$$

- Eliminiere $u(\cdot)$:

$$u(x) \cdot \varphi(\overbrace{\lambda t + (1-\lambda)t'}^{\text{Zeit}}) = u(y)\varphi(\kappa(\overbrace{\lambda t + (1-\lambda)t'}^{\text{Zeit}}) + s) =$$

$$= u(y) \cdot \varphi\left(\lambda(\kappa t + s) + (1-\lambda)(\kappa t' + s)\right) =$$

$$\overset{(*)}{=} u(y) \cdot \varphi\left(\lambda\, \varphi^{-1}\left(\frac{u(x)}{u(y)}\varphi(t)\right) + (1-\lambda)\, \varphi^{-1}\left(\frac{u(x)}{u(y)}\varphi(t')\right)\right)$$

$$\left[r = \frac{u(x)}{u(y)}, \quad \varphi(t) =: w, \quad \varphi(t') =: z, \quad \varphi^{-1} =: \psi \right]$$

$$\Rightarrow \quad r \cdot \varphi\left(\lambda\, \psi(w) + (1-\lambda)\psi(z)\right) = \varphi\left(\lambda\, \psi(rw) + (1-\lambda)\psi(rz)\right)$$

• Eliminiere φ: $\quad \psi(rw) =: \psi_r(w)\,, \quad \frac{\varphi(t)}{r} =: \varphi_r(t)$

$$\varphi\left(\lambda\psi(w)+(1-\lambda)\psi(z)\right) = \varphi_r\left(\lambda\psi_r(w)+(1-\lambda)\psi_r(z)\right)$$

$$\psi_r\left[\varphi\left(\lambda\psi(w)+(1-\lambda)\psi(z)\right)\right] = \underbrace{\psi_r\circ\varphi_r}\left(\lambda\psi_r(w)+(1-\lambda)\psi_r(z)\right)$$

$$\left[\ \psi_r\circ\varphi_r(t) = \psi_r\left(\frac{\varphi(t)}{r}\right) = \psi\left(r\cdot\frac{\varphi(t)}{r}\right) = \psi\circ\varphi(t) = \right.$$
da $\psi = \varphi^{-1}$

Setze $\psi_r\circ\varphi =: h_r$:

$$h_r\left(\lambda t + (1-\lambda)\cdot t'\right) = \lambda\cdot h_r(t) + (1-\lambda)h_r(t')$$ – linear auf Konvexkombinationen

$\Leftrightarrow \quad h_r(t) = \alpha_r\cdot t + \gamma_r$ mit α_r, γ_r unbekannte Funktionen

Also $\quad \psi_r(\varphi(t)) = \alpha_r\cdot t + \gamma_r \Leftrightarrow \psi(r\underbrace{\varphi(t)}_{=w}) = \alpha_r\underbrace{t}_{=\varphi^{-1}(w)=\psi(w)} + \gamma_r$

$\Leftrightarrow \quad \psi(rw) = \alpha_r\,\psi(w) + \gamma_r$

• Löse $\quad \psi(rw) = \alpha(r)\psi(w) + \gamma(r) \quad \forall r, w > 0.$

unbekannt

$w := 1$: $\quad \psi(r) = \alpha(r)\underbrace{\psi(1)}_{=0,\ \text{da } \varphi(0)=1 \text{ und } \psi=\varphi^{-1}} + \gamma(r) = \gamma(r)$

$\Rightarrow \quad \psi(rw) - \psi(r) = \alpha(r)\,\psi(w) \Rightarrow \psi(rw) = \psi(r) + \alpha(r)\psi(w)$

$$- \quad \psi(r\cdot w) = \psi(w) + \alpha(w)\psi(r)$$

$$\psi(w)\left[\alpha(r)-1\right] = \psi(r)\left[\alpha(w)-1\right]$$

1. Fall: $\quad \alpha(r) \equiv 1 \quad \forall r.$

$$\psi(rw) = \underbrace{\alpha(r)}_{=1}\psi(w) + \underbrace{\gamma(r)}_{\psi(r)} = \psi(r) + \psi(w) \Rightarrow \boxed{\psi(rw) = \psi(r) + \psi(w)}$$

2. Fall: $\exists\, r_0$ mit $\alpha(r_0) \neq 1$

$$\psi(w) = \underbrace{\frac{\psi(r_0)}{\alpha(r_0)-1}}_{=:\gamma}\left[\alpha(w)-1\right] = \gamma\cdot(\alpha(w)-1)$$

$=: \gamma$ konstant $\neq 0$, ansonsten $\psi(w) = 0\ \forall w$ und ψ^{-1} ex. nicht.

$$\Rightarrow \quad \psi(rw) = \alpha(r)\psi(w) + \psi(r) \overset{!}{=} \gamma(\alpha(rw)-1) = \psi(rw)$$

$$\Rightarrow \quad \alpha(r)\cancel{\gamma}(\alpha(w)-\cancel{1}) + \cancel{\gamma(\alpha(r)-1)} = \cancel{\gamma}(\alpha(rw)-\cancel{1}) \Rightarrow \boxed{\alpha(rw) = \alpha(r)\cdot\alpha(w)}$$

• $\psi(rw) = \psi(r) + \psi(w)$

Setze $r = e^x$, $w = e^y$

$$\Rightarrow \psi(e^{x+y}) = \psi(e^x) + \psi(e^y) \Rightarrow f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$\psi \circ \exp =: f$ - linear

konstant

$$\Rightarrow f(x) = cx \quad \Rightarrow \psi(e^x) = cx \Rightarrow e^{\overset{t/c}{x}} = \psi^{-1}(\underbrace{cx}_{=t}) = \varphi(cx)$$

(oder $\psi(t) = c \cdot \ln t$)

$$\boxed{\varphi(t) = e^{t/c}}$$ exponentiell mit $c<0$

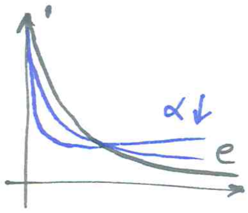
• $$\alpha(rw) = \alpha(r)\cdot\alpha(w) \xRightarrow{\ln(\dots)} \underbrace{\ln\alpha}_{\psi}(rw) = \underbrace{\ln\alpha}_{\psi}(r) + \underbrace{\ln\alpha}_{\psi}(w)$$

$$\xRightarrow[\text{s.o.}]{} \ln\alpha(w) = d\cdot\ln w \Rightarrow \alpha(w) = w^d \Rightarrow \underbrace{\psi(w)}_{t} = \gamma(w^d - 1)$$ Fall 2

Mit $\varphi^{-1} = \psi$: $$\boxed{\varphi(t) = \left(\frac{t}{\gamma} + 1\right)^{\frac{1}{d}}}$$ hyperbolisch mit $d<0$

Allgemein: $$\underbrace{\varphi(t) := (1+\alpha t)^{-\beta/\alpha}}_{\text{Hyperbolische Diskontierung}}, \quad \alpha, \beta > 0$$

• $$\alpha \to 0 \Rightarrow \varphi(t) = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{t}{n}\right)^{-\beta\frac{n}{t}\cdot t} = e^{-\beta t}.$$



$$\Rightarrow u(x,t) = \frac{u(x)}{(1+\alpha t)^{\beta/\alpha}}$$ ← diskontierter Nutzen

$$U(x_t, t=0,1,\dots) = \sum_{t=0}^{\infty} \frac{u(x_t)}{(1+\alpha t)^{\beta/\alpha}}$$

↑
Nutzen eines Auszahlungsstromes

Matching Law (Herrnstein)

Skinner-Box für Tauben: $\overset{p_1}{\downarrow}\boxed{1}$ $\quad$ $\overset{p_2}{\downarrow}\boxed{2}$ Drücken (Reaktion)

$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\downarrow\qquad\downarrow$

Futter $R_1 \qquad R_2$ (reinforcement)

$$\frac{p_1}{p_1+p_2} = \frac{R_1}{R_1+R_2}$$

Reaktionsrate $\qquad$ Verstärkungsrate

$$\Updownarrow$$

$$\cancel{p_1R_1} + p_1R_2 = \cancel{R_1 p_1} + p_2 R_1 \iff \frac{p_1}{p_2} = \frac{R_1}{R_2}$$

Sei $y > x$ mit $u(x) = u(y)\,\underbrace{\varphi(t)}_{\text{unbekannt}}$

Verstärkung

$0 \quad \overset{x}{t_1} \quad \overset{y}{t+t_1} \longrightarrow$ Zeit

bekannte Reaktion $\qquad$ unbekannte Reaktion

$\Rightarrow$ Matching Law

$$\frac{t_1}{t_1+t} = \frac{u(x)}{u(y)} = \varphi(t)$$

$$\Rightarrow \quad \varphi(t) = \frac{1}{1+\underbrace{\left(\frac{1}{t_1}\right)}_{=:\alpha}\cdot t} = \frac{1}{1+\alpha t}$$

hyperbolische Diskontierung

Stochastischer Nutzen

Annahme: $\frac{d\,u(x,t)}{dt} = -\lambda \cdot u(x,t) \quad \forall x$ $\quad$ "Abfall des Nutzens ist proportional zum aktuellen Nutzen"

Anfangs-Bedingung $\rightarrow u(x,0) = u(x)$ $\qquad$ Abfallsrate $\lambda > 0$

$$\Rightarrow \quad \ln u(x,t) = -\lambda + C \Rightarrow u(x,t) = u(x) \cdot \underbrace{e^{-\lambda t}}_{=\varphi(t)}$$

exponentielle Diskontierung

$-u'/u = -(\ln u)'$ Wahrnehmungsänderung

z.B. Prior für λ ist exponentiell-verteilt

$$\pi(\lambda) := \frac{1}{K}\cdot e^{-\lambda/K}, \quad \lambda \geq 0.$$

$$E_\lambda(u(x,t)) = \int_0^\infty u(x,t)\,\pi(\lambda)\,d\lambda = \int_0^\infty u(x)\, e^{-\lambda t}\cdot \tfrac{1}{K}\cdot e^{-\lambda/K}\,d\lambda = u(x)\cdot\frac{1}{K}\int_0^\infty e^{-\lambda\left(t+\frac{1}{K}\right)}\,d\lambda =$$

Erwartungsnutzen bzgl. Wahrnehmungsfehler

$$= \frac{u(x)\cdot 1/K}{t+\frac{1}{K}} \left. -e^{-\lambda\left(t+\frac{1}{K}\right)}\right|_0^\infty = \frac{u(x)}{1+Kt}$$

$$\Rightarrow \quad E_\lambda(u(x,t)) = \underbrace{\frac{1}{1+Kt}}_{=\varphi(t)}\, u(x)$$

hyperbolische Diskontierung