Prospect Theory (Kahnemann & Tversky)

Frage: Wie kann eingeschränkte Rationalität in die Entscheidungsfindung eingebettet werden?

loss aversion

"Verluste erzeugen mehr Enttäuschung als Gewinne Zufriedenheit"

probability distortion

"Wahrscheinlichkeit werden systematisch über- bzw. unterschätzt"

modifizierter Erwartungsnutzen

① Loss Aversion (Verlustaversion)

Problem 1: 2000 € sicher

risikoavers A: 500 sicher

B: 1.000 mit W'keit 1/2

0 mit W'keit 1/2

Problem 2: 2.000 € sicher

A: −500 sicher

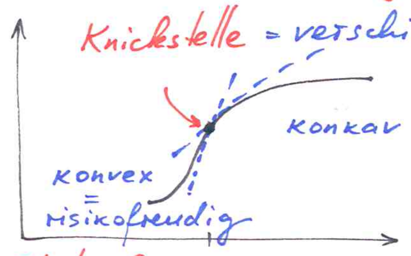
B: −1000 mit W'keit 1/2

risikofreudig 0 mit W'keit 1/2

- $u(0) = 0$
- $u(x)$ konkav für $x \geq 0$
- $u(x)$ konvex für $x \leq 0$
- $-u(-x) > u(x)$ für $x > 0$

Nutzen $u(\cdot)$

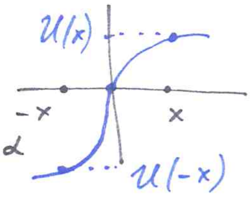
Knickstelle = verschiedene Steigungen



Index of Loss Aversion: $\lambda|_x := \dfrac{\overbrace{\lim\limits_{h \uparrow 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h}}^{u'_-(x)}}{\underbrace{\lim\limits_{h \downarrow 0} \frac{u(x+h)-u(x)}{h}}_{u'_+(x)}}$

z. B. $u(x) = \begin{cases} \ln(x+1), & x \geq 0 \\ 2x, & x \leq 0 \end{cases}$ $\quad \lambda(0) = \dfrac{(2x)'}{\ln'(x+1)}\Bigg|_{x=0} = \dfrac{2}{\frac{1}{x+1}} = 2$

Anderer Ansatz: $\tilde{\lambda}(x) := \dfrac{-U(-x)}{U(x)}$ für $x > 0$.



z. B. $u(x) = \begin{cases} x^\alpha, & x \geq 0 \\ -a(-x)^\beta, & x < 0 \end{cases}$ $\quad \tilde{\lambda}(x) = \dfrac{a x^\beta}{x^\alpha} = a x^{\beta - \alpha}$

Aber: $u_+'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$ ex. nicht für $\alpha = \frac{1}{2}, x = 0$.

Ratchet-Effekt (Duesenberry): $\begin{cases} \text{gute Zeiten} \to \text{Konsum} \\ \text{schlechte Zeiten} \to \text{Schulden} \end{cases}$

Sperrklinke

Konsum, Einsparung/Kredit, Budget

Zeit t: $u(c_t - r_t) + s_t(1+\rho)$ & $c_t + s_t = M_t$

Nutzenfunktion, Referenz (Status Quo) Bias, Zinssatz

"Modell ist nicht abgeschlossen über Budgets"

Annahme: $r_{t+1} = \alpha r_t + (1-\alpha) c_t$ "Gewohnheitsdynamik"

neue Referenz, alte Referenz

Konvexkombination mit $\alpha \in [0,1]$ fest

$$\max_c \underbrace{u(c-r) + s(1+\rho)}_{= u(c-r) + (1+\rho)\cdot(M-c)} \quad \text{s.d.} \quad c + s = M$$

$\Rightarrow (\ldots)'_c$: $u'(c(r) - r) = 1 + \rho$ und $(\ldots)'_r$: $\underbrace{u''(c(r)-r)}_{\text{falls } \neq 0}[c'(r) - 1]$ $\Rightarrow c'(r) = $

angenommen für ein t

$c(r_t) > r_t \Rightarrow r_{t+1} = \alpha r_t + (1-\alpha) \underset{c(r_t)}{\underset{\shortparallel}{c_t}} > \alpha r_t + (1-\alpha) r_t = r_t \Rightarrow c(r_{t+1}) > c(r_t)$

$r \uparrow \Rightarrow c(r) \uparrow$

Optimaler Konsum zum Zeitpunkt t

optimaler Konsum zum Zeitpunkt $t+1$

folglich $r_{t+1} = \underbrace{\alpha r_t}_{\leq c(r_t)} + (1-\alpha) c(r_t) < c(r_t) < c(r_{t+1})$

"Vererbung der Eigenschaft"

Insgesamt: $c(r_t)$ - optimaler Konsum steigt, also $s_t = M_t - c(r_t)$ fällt

z. B. $u(x) = 2\sqrt{x}$, $u'(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$, $\alpha := \frac{1}{2}$, $M_t = \frac{10}{t}$, $r_0 := 0$, $\rho := 1$

Also, $\dfrac{1}{\sqrt{c(r) - r}} = 1 + \rho \Rightarrow c(r) = r + \dfrac{1}{(1+\rho)^2}$, $c'(r) = 1$,

$$r_{t+1} = \tfrac{1}{2} r_t + (1 - \tfrac{1}{2}) c(r_t) = r_t + \frac{1}{2(1+\rho)^2}$$

$\overset{r_0 = 0}{\Rightarrow} r_t = \dfrac{t}{2(1+\rho)^2}$

$c(r_t) = \dfrac{t}{2(1+\rho)^2} + \dfrac{1}{(1+\rho)^2} = \dfrac{t+2}{2(1+\rho)^2}$

$s_t = M_t - c(r_t) = \dfrac{10}{t} - \dfrac{t+2}{2(1+\rho)^2} = \dfrac{10}{t} - \dfrac{t+2}{8}$

d.h. $s_t = 0 \Leftrightarrow \dfrac{10}{t} = \dfrac{t+2}{8} \Leftrightarrow t^2 + 2t - 80 = 0$

$t = \dfrac{-2 \pm \sqrt{4 + 4 \cdot 80}}{2} = 8$ Jahre

② Probability Distortion (Wahrscheinlichkeitsverzerrung)

Problem 1:

14% A: $\begin{cases} 6000 & \text{mit W'keit } 0.45 \\ 0 & \text{—″—} \quad 0.55 \end{cases}$

86% B: $\begin{cases} 3000 & \text{mit W'keit } 0.9 \\ 0 & \text{—″—} \quad 0.1 \end{cases}$

Problem 2:

73% A: $\begin{cases} 6000 & \text{mit W'keit } 0.001 \\ 0 & \text{—″—} \quad 0.999 \end{cases}$

27% B: $\begin{cases} 3000 & \text{mit W'keit } 0.002 \\ 0 & \text{—″—} \quad 0.998 \end{cases}$

Erwartungsnutzen: $\begin{cases} 0.45\, u(6000) < 0.9\, u(3000) \\ 0.001\, u(6000) > 0.002\, u(3000) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} \frac{u(6000)}{u(3000)} < 2 \text{ und} \\ \frac{u(6000)}{u(3000)} > 2 \ \lightning \end{array}$

"Kleine Wahrscheinlichkeiten werden überschätzt,
Große Wahrscheinlichkeiten werden unterschätzt"

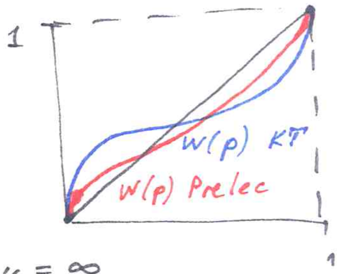
→ Probability weighting function
(Gewichtung der Wahrscheinlichkeiten)

$w: [0,1] \to [0,1]$
- strikt steigend
- surjektiv

$\overset{\text{ü}}{\Rightarrow}$ (i) $w(0)=0$, $w(1)=1$
(ii) w und w^{-1} stetig

Beispiele: • Kahneman/Tversky-Funktion

$$w(p) = \frac{p^\gamma}{\left[p^\gamma + (1-p)^\gamma\right]^{\frac{1}{\gamma}}}, \quad \frac{1}{2} \le \gamma < 1$$



$$w'_+(0) = \lim_{p\to 0} \frac{w(p)}{p} = \lim_{p\to 0} \frac{p^{\overbrace{\gamma-1}^{<0}}}{\left[p^\gamma + (1-p)^\gamma\right]^{\frac{1}{\gamma}}} = \lim_{p\to 0} \frac{1}{p^{1-\gamma}\left[p^\gamma + (1-p)^\gamma\right]^{1/\gamma}} = \infty$$

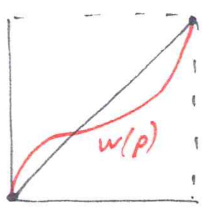
$$w'_-(1) = \lim_{h\to 0} \frac{w(1-h) - w(1)}{-h} \underset{1-p=:h}{=} \lim_{p\to 1} \frac{w(p)-1}{p-1} = \lim_{p\to 1} \frac{p^\gamma - \left[p^\gamma + (1-p)^\gamma\right]^{\frac{1}{\gamma}}}{(p-1)\left[p^\gamma + (1-p)^\gamma\right]^{\frac{1}{\gamma}}} \overset{\text{ü}}{=} \infty$$

• Prelec-Funktion

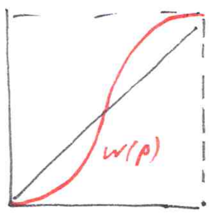
$$w(p) = e^{-\beta(-\ln p)^\alpha}, \quad \alpha > 0, \beta > 0$$

z.B. $\alpha = 1/2$, $\beta = 1$: $w(p) = e^{(-\ln p)^{1/2}}$

$$w'(p) = e^{(-\ln p)^{1/2}} \cdot \frac{1}{2}(-\ln p)^{-1/2} \cdot -\frac{1}{p} = \frac{e^{(-\ln p)^{1/2}}}{2p \cdot (-\ln p)^{1/2}} \xrightarrow[p\to 1]{p\to 0} \infty \quad \text{ü}$$



$\alpha < 1$



$\alpha > 1$

Rolle von β → ü

(3) Modifizierter Erwartungsnutzen

ⓐ Rank-dependant

$$(x,p) := \left(x_i, p_i \mid i = 1, \dots, n \right) \quad \text{mit} \quad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1 \text{, o.B.d.A. } \underbrace{x_1 < x_2 < \dots < x}_{\text{Rang der Auszahlungen}}$$

x_i: Auszahlung, p_i: Wahrscheinlichkeit, (x,p): Lotterie

Sei X - Zufallsvariable für die Auszahlung mit $F(X) = \mathbb{P}(X \leq x)$

F: Verteilungsfunktion
- F steigend
- $F(-\infty) = 0$, $F(\infty) = 1$

Definiere $\varphi(x) := w(F(x))$ — w: Gewichtsfunktion

φ: Verteilungsfunktion, da
- $\varphi = w \circ F$ steigend
- $\varphi(-\infty) = w(F(-\infty)) = w(0) = 0$
- $\varphi(+\infty) = w(F(\infty)) = w(1) = 1$

und $\mathbb{P}(\tilde{X} \leq x) := \varphi(x)$

$\tilde{X}$: neue Zufallsvariable der modifizierten Auszahlung

$$\pi_i := \mathbb{P}(\tilde{X} = x_i) = \varphi(x_i) - \varphi(x_{i-1}) = w(F(x_i)) - w(F(x_{i-1})) = w\left(\sum_{j=1}^{i} p_j\right) - w\left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j\right)$$

Rank-dependant Utility: $\mathcal{U}(x,p) = \sum_{i=1}^{n} \pi_i \, u(x_i)$

- $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = \sum_{i=1}^{n} w\left(\sum_{j=1}^{i} p_j\right) - w\left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j\right) = w(1) - w(0) = 1$
- Falls $w(p) = p$, dann $\pi_i := \sum_{j=1}^{i} p_j - \sum_{j=1}^{i-1} p_j = p_i$ (gewöhnlicher Erwartungsnutzen)

ⓑ Cumulative

$$\Big((x_{-k}, p_{-k}) \mid k = 1, \dots, m \;;\; x_0 = 0, p_0 \;;\; (x_i, p_i) \mid i = 1, \dots, n \Big), \quad \underbrace{x_{-m} < \dots < 0 < \dots}_{\text{Rang}}$$

Prospekt — Verluste — Status Quo — Gewinne

$$\sum_{j=-m}^{n} p_j = 1.$$

$$\pi_i := w^+\left(\sum_{j=1}^{i} p_j\right) - w^+\left(\sum_{j=1}^{i-1} p_j\right)$$

$$\pi_{-k} := w^-\left(\sum_{j=1}^{k} p_{-j}\right) - w^-\left(\sum_{j=1}^{k-1} p_{-j}\right)$$

mit $w^+(\cdot)$ und $w^-(\cdot)$ Gewichtungsfunktionen

Aber: $\sum_{j=-m}^{n} \pi_j \neq 1$ im Allgemeinen; $\sum_{i=1}^{n} \pi_i = 1$, $\sum_{k=m}^{1} \pi_{-k} = 1$

$$\mathcal{U}((x,p)) := \sum_{k=m}^{1} \pi_{-k} \cdot u^-(x_k) + \underbrace{\pi_0}_{:=-1} \cdot \underbrace{u(0)}_{:=0} + \sum_{i=1}^{n} \pi_i \cdot u^+(x_i)$$

u^-: Nutzen für Gewinne; u^+: Nutzen für Verluste