Savage Choice under Uncertainty

Frage: Wie kann man Auswahlverhalten via Nutzenfunktion und subjektiven Wahrscheinlichkeiten beschreiben?

S - States/Zustände der Natur

X - Outcomes/Konsequenzen

$F := \{ f : S \to X \text{ - Abbildungen} \}$

Acts/Handlungen

$s \in S$: $f(s) = x$ - Konsequenz, die entsteht, wenn Zustand s passiert und Handlung f realisiert wird.

z.B. Pilze ↗ harmlos s_1
→ giftig s_2

Essen: $f \in F$
Wegwerfen: $g \in F$

X: Vergnügen & Leben x_1
Vergnügen & Sterben x_2
Kein Vergnügen x_3

Also: $f(s_1) = x_1$, $f(s_2) = x_2$, $g(s_1) = g(s_2) = x_3$.

Satz: $\succsim$ auf F erfülle P_1-P_7 genau dann, wenn es ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ^* auf S (subjektive Wahrscheinlichkeit) und eine beschränkte Nutzenfunktion $u: X \to \mathbb{R}$, so daß

Erwartungsnutzen von Handlungen

$$f \succsim g \iff \int_{s \in S} u(f(s))\, d\mu^*(s) \geq \int_{s \in S} u(g(s))\, d\mu^*(s)$$

Vergleich von Handlungen

Mehrnoch: μ^* ist eindeutig und u ist bis auf positive Lineartransformation eindeutig.

Axiome P_1- P_7:

P_1: $\succsim$ auf F ist rational

Bez.: $\forall f, h \in F$, $A \subseteq S$ definiere $f_A^h(s) := \begin{cases} h(s), & s \in A \\ f(s), & s \in S \setminus A \end{cases}$

"ersetze f als h auf A"

P_2: $\forall f, g, h, h' \in F$, $A \subset S$: $f^h_{S|A} \succsim g^h_{S|A} \iff f^{h'}_{S|A} \succsim g^{h'}_{S|A}$

"gleiche Werte auf $S|A$ sind irrelevant für den Vergleich"

⇓ wohldefiniert

Bedingte Präferenzen: $f \succsim_A g$,

d.h. $\exists h \in F$ mit $f^h_{S|A} \succsim g^h_{S|A}$.

Bez.: A heißt Null-Ereignis, falls $\forall f, g \in F \quad f \sim_A g$.

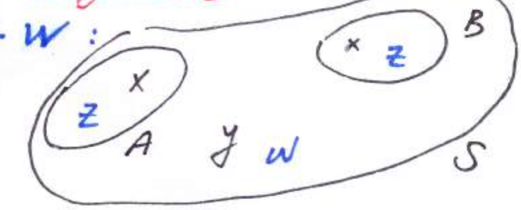
"zero-probability" "Unterschiede auf A sind irrelevant"

P3: $\forall f \in F$, $A \subseteq S$ - No-Null: $\quad x \succsim y \iff f_A^x \succsim f_A^y$, $x, y \in X$

"Werte auf $S \setminus A$ sind irrelevant für Konsequenz-Vergleiche"

P4: $\forall A, B \subseteq S$, $x, y, z, w \in X$ mit $x \succ y$, $z \succ w$:

$$y_A^x \succsim y_B^x \iff w_A^z \succsim w_B^z$$

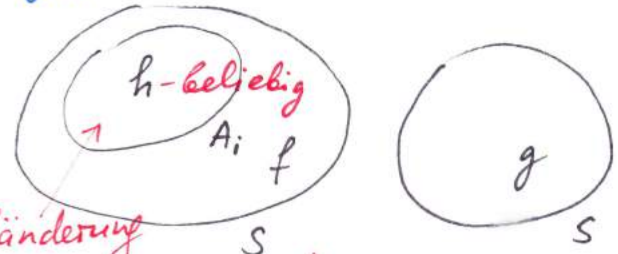


"A wahrscheinlicher als B" - unabhängig von Repräsentanten $x \succ y$, $z \succ w$

P5: $\exists f, g \in F : f \succ g$ (nicht trivial)

P6: $\forall f, g, h \in F$ mit $f \succ g$ $\exists A_1, \dots, A_m$ - Partition von S, d.h.
- paarweise disjunkt,
- $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = S$

so daß $f_{A_i}^h \succ g$ und $f \succ g_{A_i}^h$ $\forall i = 1, \dots, m$



Abänderung auf einer marginal wahrscheinlichen Menge A_i } möglich wegen $f \succ g$

P7: $\forall f, g \in F$, $A \subseteq S$ gilt:
- $[\forall s \in A \quad f \succsim_A g(s)] \Rightarrow f \succsim_A g$
- $[\forall s \in A \quad g(s) \succsim_A f] \Rightarrow g \succsim_A f$

z.B. $A := S$:

$f_S \succsim g(s)_S$ - konstant $\forall s \Rightarrow f_S \succsim g_S$

bei jedem festen Zustand, d.h. unter vollständiger Information

z.B. Geschäftsmann kauft Land/Anlage

Wahl: ist relevant — Democrats vs. Republicans

kaufen — unter Information zum Wahlausgang — kaufen

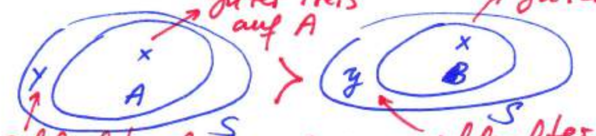
$\Rightarrow$ Entscheide fürs Kaufen (auch ohne diese Information)

Beweisskizze (Konstruktion von μ^* und u aus dem Savage-Satz)

1. Präferenzrelation auf $S \supseteq A, B$:
"implicit judgement"

$$A \succcurlyeq B :\Longleftrightarrow \left[x \succ y \Rightarrow y_A^x \succcurlyeq y_B^x \quad \forall x, y \in X \right]$$

"A wahrscheinlicher als B"



P1 - P6 für $\succcurlyeq$ auf $F \overset{\text{(ü)}}{\Longrightarrow} \succcurlyeq$ auf S erfüllt F1 - F5

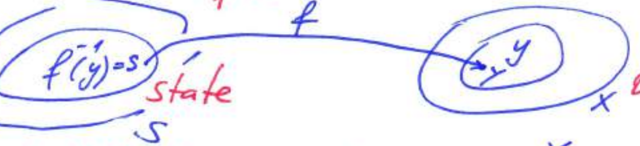
Folglich existiert W'maß μ^* mit $A \succcurlyeq B \Leftrightarrow \mu^*(A) > \mu^*(B) \ \forall A, B$
(siehe Vorlesung "Subjective Probabilities")

2. Präferenzrelation auf einfachen Wahrscheinlichkeitsmaßen M_X bzgl. X - Outcomes (d.h. mit endlichem Träger, $\mu(X') = 1$ für $X' \subseteq X$ endlich)

(i) $\forall \mu \in M_X \ \exists f \in F$ so daß $\mu = \mu^* \circ f^{-1}$ [aus P1 - P6 (ü)]

einfaches W'Maß auf X

Transformationsmaß, d.h. $\forall Y \subseteq X: \mu^* \circ f^{-1}(Y) := \mu^*(\{ s \in S \mid f(s) \in Y \})$



"Wahrscheinlichkeit von Konsequenzen Y = Wahrscheinlichkeit von Zuständen $f^{-1}(Y)$, in denen die Handlung f zu diesen Konsequenzen führt"

(ii) $\forall \mu^* \circ f^{-1}, \mu^* \circ g^{-1} \in M_X$: $\mu^* \circ f^{-1} = \mu^* \circ g^{-1} \Rightarrow f \sim g$ [aus P1-P6]

einfache Transformationswahrscheinlichkeitsmaße

[Notwendig : $\displaystyle\int_{s \in S} u(f(s))\, d\mu^*(s) = \int_{x \in f(S)} u(x)\, d(\mu^* \circ f^{-1}(x))$; $\mu^* \circ f^{-1}(x)$ | Koordinatentrafo: $f(s) = x$

$$= \int_{s \in S} u(g(s))\, d\mu^*(s) \Rightarrow f \sim g \quad]$$

Erwartungsnutzen

$\forall \mu, \nu \in M_X \quad \mu \succcurlyeq \nu :\Longleftrightarrow f \succcurlyeq g$ mit $\mu = \mu^* \circ f^{-1}$, $\nu = \mu^* \circ g^{-1}$

Lotterienvergleich auf Outcomes (vgl. von Neumann-Morgenstern)

wohldefiniert, d.h. unabhängig von f und g nach (ii)

existiert nach (i)

Es gilt für $\succsim$ auf <u>einfachen</u> Lotterien M_X: [(ii) aus $P_1 - P_6$]

- $\succsim$ ist rational
- $\succsim$ ist stetig, d.h. $\forall \underbrace{\mu \succsim \eta \succsim \nu}_{\in M_X} \; \exists \alpha \in [0,1]$ mit $\alpha\nu + (1-\alpha)\mu \sim \eta$
- $\succsim$ ist unabhängig, d.h.

$$\left[\mu \succsim \nu \Leftrightarrow \alpha\mu + (1-\alpha)\eta \succsim \alpha\mu + (1-\alpha)\eta\right] \quad \forall \alpha \in [0,1],\ \mu, \eta, \nu \in M_X$$

$\Rightarrow$ von Neumann-Morgenstern bzgl. $\succsim$ auf einfachen Lotterien

$\exists u: X \to \mathbb{R}$

Nutzen von Konsequenzen

$$\mu \succsim \nu \Leftrightarrow \int u(x)\, d\mu > \int u(x)\, d\nu$$

(i) $\Rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}\mu := \mu^* \circ f^{-1} \\ \nu := \mu^* \circ g^{-1}\end{array}\right\}$ NUR EINFACH. $\quad \int u \circ f \, d\mu^* \quad \int u \circ g \, d\mu^*$

"

und $f \succsim g \Leftrightarrow \int u \, d\mu^* \circ f^{-1} > \int u \, d\mu^* \circ f^{-1}$

Grenzwertargument liefert die Behauptung für <u>alle</u> Handlungen und nicht nur für <u>einfache</u> wie schon bewiesen.